Paris-Lodron-Universität Salzburg

Naturwissenschaftliche Fakultät

Institut für Mathematik

Diplomarbeit

Operatorräume und die Nichtnuklearität von $B(h)$, gezeigt von Junge/Pisier

eingereicht im: April 2000

von: Bernhard J. Burgstaller

geboren am 15. Mai 1973

in Hallein

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Forscher der C^*-Algebrentheorie haben schon vor langer Zeit herausgefunden, dass es für je zwei C^*-Algebren A und B auf dem algebraischen Tensorprodukt $A \otimes B$ in der Regel verschiedene C^*-Normen gibt. D.h. die involutive Algebra $A \otimes B$ wird unter verschiedenen C^*-Normen zu verschiedenen C^*-Algebren. Wenn h ein Hilbertraum ist, dann bilden die Menge der beschränkten linearen Abbildungen $B(h)$ eine C^*-Algebra. $B(h)$ ist einfach eine ganz besondere C^*-Algebra, und es es ist damit sehr verständlich, über $B(h)$ möglichst viel aus C^*-algebraischer Sicht wissen zu wollen. Etwa wenn A eine weitere C^*-Algebra ist, welche C^*-Normen gibt es auf $B(h) \otimes A$?
Simon Wassermann konnte als erster zeigen, dass es für h unendlichdimensional eine C^*-Algebra D gibt, sodass auf $B(h) \otimes D$ mindestens zwei C^*-Normen existieren, d.h. $B(h)$ ist nicht nuklear.
Jetzt ist $B(h)$ eine ziemlich "alltägliche" C^*Algebra in der Operatortheorie, trotzdem blieb die Frage, wieviele C^*-Normen es auf $B(h) \otimes B(h)$ gibt, lange Zeit offen.

Diese Frage wurde 1994 von Marius Junge und Gilles Pisier beantwortet. Sie zeigten, dass es für jeden unendlichdimensionalen Hilbertraum h auf $B(h)\otimes B(h)$ *mindestens zwei* C^*-Normen gibt. D.h. es ist nicht eindeutig bestimmt, wie man die involutive Algebra $B(h) \otimes B(h)$ zu einer C^*-Algebra vervollständigt.

Genau diesen Beweis von Junge/Pisier werde ich in dieser Arbeit wiederholen. Leider ist dieser Beweis wirklich nichttrivial und setzt ein Grundwissen aus einer anderen Ecke, als die "reine" C^*-Algebrentheorie, voraus. Es handelt sich dabei um die - in mathematischen Zeiträumen - "jüngst" sich aus der Operatortheorie entwickelte Theorie der *Operatorräume*. Die Operatorräume mag man als Teilgebiet der Operatortheorie ansehen. An die Stelle von C^*-Normen treten *Matrizennormen* und an die Stelle von *-Homomorphismen *vollständig beschränkte* Abbildungen.

Was sind Operatorräume?
Sei nun ein beliebiger Hilbertraum h gegeben und $E \subseteq B(h)$ ein linearer Teilraum. Dann heißt E ein *Operatorraum*. Das ist an sich noch nichts besonderes. Das besondere ist, das man E nicht nur als normierten Raum ansieht, oder gar nur als linearen Raum, sondern mit E immer auch alle seine Matrizenräume betrachet. Sei $M_n(E)$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus E, also formal

$$M_n(E) := \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in E \right\}.$$

Dann wird $M_n(E)$ unter den punktweisen Operationen ein Vektorraum. Da $E \subseteq B(h)$ gilt, mag man auch $M_n(E)$ als Teilraum von $M_n(B(h))$ auffassen. $M_n(B(h))$ ist aber ein Banachraum, wenn man ihn als Menge von Operatoren $h \oplus ... \oplus h \to h \oplus ... \oplus h$ auffasst, also eine Matrix $x := [x_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ mit Einträgen $x_{ij} \in B(h)$ identifiziert man mit einem Element $x \in B(h^n)$:

$$x : h^n \to h^n : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ .. \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & ... & x_{2n} \\ ...... & & \\ x_{n1} & ... & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ .. \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

wobei hier der Vektor $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ wie gewohnt mit der Matrix x multipliziert wird. Man erhält also eine Norm, die gewöhnliche Norm von beschränkten linearen Abbildungen zwischen den Banachräumen h^n, auf dem Matrizenraum $M_n(E) \subseteq M_n(B(h))$:

$$\|x\|_{M_n(E)} := \|x\|_{B(h^n)} = \sup_{\xi_j \in h,\, \|\xi_1\|^2+...+\|\xi_n\|^2 \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n x_{1j}\xi_j \\ ... \\ \sum_{j=1}^n x_{nj}\xi_j \end{pmatrix} \right\|_{h^n}$$

Damit sind auf allen Matrizenräumen $M_1(E), M_2(E), M_3(E), ...$ Normen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ konstruiert, die überdies nicht völlig zusammenhangslos in Beziehung stehen. Sie erfüllen die sogenannten 'Axiome von Ruan'. Ein Operatorraum nach obiger Definition wäre ein Paar $(E, B(h))$, wo h ein Hilbertraum ist. Man kann allerdings den Operatorraum E vom Grundraum $B(h)$ befreien, sodass man unter einen Operatorraum einen Vektorraum E versteht, der auf allen Matrizenräumen mit Normen $\alpha_1, \alpha_2, ...$ ausgestattet ist, die die 'Axiome von Ruan' erfüllen. Diese Definition eines Operatorraumes soll uns aber hier in der Einleitung nicht tangieren.

Die Klasse der Operatorräume bilden eine eigene Kategorie, die zwischen der Kategorie der Banachräume und der Kategorie der C^*-Algebren angesiedelt ist. Denn jeder Banachraum kann zu einem Operatorraum gemacht werden, aber nicht auf eindeutige Weise. Denn ein Operatorraum enthält aufgrund der Fülle von Normen mehr Information. Anderenseits ist ein Operatorraum nicht so starr fixiert wie eine C^*-Algebra, da ein Operatorraum bei weitem nicht so viele algebraische Daten enthält, aber trotzdem stets 'vollständig isometrisch' in eine C^*-Algebra eingebettet ist, d.h. die Matrizennormen kann man als von $B(h)$ stammend auffassen. D.h. Operatorräume lockern die Bedingungen einer C^*-Algebra.

In der Kategorie der Operatorräume fungieren die sogenannten *vollständig beschränkten Abbildungen* als Homomorphismen. Seien zwei Operatorräume E, F und eine lineare Abbildung $u : E \to F$ gegeben. Dann ordnet man jedem $n \geq 1$ eine lineare Abbildung u_n zwischen den Matrizenräumen $M_n(E)$ und $M_n(F)$ zu:

$$u_n : M_n(E) \to M_n(F) : [x_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \mapsto [u(x_{ij})]_{1\leq i,j\leq n} .$$

u heißt dann vollständig beschränkt, wenn gilt

$$\|u\|_{cb} := \sup_n \|u_n\|_{M_n(E)\to M_n(F)} < \infty .$$

Technische Anmerkungen zur Arbeit:
Diese Arbeit gibt keine völlig elementare Einführung in Operatorräume. Vielmehr sollte man schon mit Operatorräumen, den Axiomen von Ruan und den vollständigen beschränkten Abbildungen ein wenig vertraut sein. Die Kenntnis des Satzes von Ruan und des Einbettungssatzes von Wittstock/Paulsen sollte auch bekannt sein. Nichtsdestotrotz wiederhole ich die grundlegenden Definitionen und Sätze zu Operatorräumen im Schnellverfahren im 1. Kapitel. Zudem wird auch elementare C^*-Algebratheorie und ihrer Tensorprodukte, allen voran das 'minimale' und 'maximale' Tensorprodukt verwendet. Ich möchte hier auf [L] verweisen.

Die Arbeit zeigt einige Konstruktionen von Operatorräumen, wie Dualraum eines Operatorraumes, die aus vorhandenen Operatorräumen abgeleitet werden. Die Konstruktionen sind systematisch in einzelne Kapitel eingeteilt. Im letzten Kapitel wird das schon erwähnte Resultat von Junge/Pisier gezeigt, dessen Beweis ausgiebig von den vorangestellten Kapiteln Gebrauch macht.

In Beweisen werden oft ohne expliziten Verweis die Resultate vorangegangener Kapiteln verwendet, man achte bitte darauf. Nur im letzten Kapitel versuche ich möglichst vollständig zu verweisen. Ausdrücklich darauf hinweisen möchte ich, dass ab der Überschrift "Das minimale Tensorprodukt" alle Operatorräume vollständig angenommen werden.

Ich verwende oft folgende Konvention: Seien etwa $E, E_i, K, E^*, ...$ Räume oder Mengen. Dann gelte automatisch, wenn nichts anderes gesagt wird, dass für die kleingeschriebenen Variablen $e, e_i, k, e^*, ...$ gilt: $e \in E, e_i \in E_i, k \in K, e^* \in E^*, ...$

In manchen Beweisen verwende ich die Einsteinsche Summenkonvention, was ich immer ausdrücklich explizit erwähne. Ich wiederhole sie: Statt etwa $\sum_{i=1}^n x_i$ schreibt man x_i. Eigene Indizes stehen für eigene Summen: statt etwa $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i\, x_j$ schreibt man $x_i\, x_j$. Ich setze die Einsteinsche Summenkonvention wirklich nur sehr sparsam ein, wo eine nicht eindeutige Interpretation auszuschließen ist. Sie ist praktisch für die Tensorrechnung, da die Elemente des algebraischen Tensorproduktes aus Summen von Elementartensoren besteht und die Weglassung der Summenzeichen die Übersichtlichkeit erhöht.

1 Operatorräume

Unter einem Operatorraum versteht man einen Vektorraum E über $\mathcal{C}$, der auf allen Matrizenräumen $M_n(E)$ mit Normen α_n ausgestattet ist. Eine gewisse Regelung zwischen diesen Normen verlangt man aber und zwar die beiden Axiome (R_1') und (R_2') von Ruan:

AXIOM (R_1'): Für alle $n \geq 1$ gilt, dass $\forall x \in M_n(E)$, $\forall a, b \in M_n$

$$\alpha_n(axb) \leq \|a\|_{M_n}\, \alpha_n(x)\, \|b\|_{M_n}$$

AXIOM (R_2'): Für alle $n \geq 1, m \geq 1$, für alle $x \in M_n(E)$, $y \in M_m(E)$ gilt

$$\alpha_{n+m}\left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & y \end{array}\right) = \max\{\alpha_n(x), \alpha_m(y)\}$$

Wir werden ab dem nächsten Kapitel aber noch hinzunehmen, dass ein Operatorraum immer vollständig angenommen wird.

Aus den Axiomen von Ruan folgt unmittelbar, dass jeder lineare Teilraum E eines Operatorraumes F vermöge $M_n(E) \subseteq M_n(F)$ selbst zu einem Operatorraum wird. Für einen Hibertraum h wird $B(h)$ zu einem Operatorraum, wenn man wie schon in der Einleitung dargelegt $M_n(B(h))$ mit der Norm von $B(h^n)$ ausstattet. Wenn nun $A \subseteq B(h)$ eine C^*-Teilalgebra ist, so ist A ein Teiloperatorraum von $B(h)$. Diese Matrizennorm $M_n \otimes A$ stimmt dabei mit der Norm der C^*-Algebra $M_n \otimes_{min} A$ überein. Denn es errechnet sich, dass

$$M_n \otimes B(h) = B(h^n)$$

als involutive Algebren. Da die C^*-Norm auf $B(h^n)$ eindeutig bestimmt ist, ergibt sich zusammen aus der Injektivität des minimalen Tensorproduktes

$$M_n \otimes_{min} A \subseteq M_n \otimes_{min} B(h) = B(h^n)\,.$$

Wir geben jetzt der Reihe nach die Definitionen der Operatorraum-Morphismen.

Wenn E, F Operatorräume sind, dann kann man E und F als gleiche Operatorräume ansehen, wenn alle Operatorraumstrukturen von E und F ident sind. Diese Strukturen sind nur der Vektorraum und die Matrizennormen.
D.h.: Seien E und F Operatorräume. Dann sind E und F 'gleiche' Operatorräume, in Zeichen $E = F$, wenn es eine lineare Bijektion $u : E \to F$ gibt, sodass

$$id \otimes u : M_n \otimes E \to M_n \otimes F \tag{1}$$

eine Isometrie ist für alle $n \geq 1$. E und F heißen dann *vollständig isometrisch ismorph.* Umgekehrt nennen wir jede solche Abbildung $u : E \to F$ mit den genannten Eigenschaften einen *vollständigen isometrischen Isomorphismus.*

Einen Operatoraum E wird man als Teiloperatorraum von einem Operatoraum F auffassen, wenn E vollständig isometrisch isomorph zu einem Teilraum von F ist.
D.h.: Seien E und F Operatorräume. Dann ist E ein Teiloperatorraum von F, in Zeichen $E \subseteq F$, wenn es eine lineare Injektion $u : E \to F$ gibt, sodass (1) eine Isometrie ist für alle $n \geq 1$. Umgekehrt heißt jedes solche Abbildung u eine *vollständige Isometrie.*

Die Frage, welche Abbildungen $u : E \to F$ als Operatorraummorphismen anzusehen sind, gestaltet sich etwas schwieriger. Sicherlich verlangen wir, dass u linear ist. Wenn E und F nur normierte Räume wären, so verlangte man die Stetigkeit, bzw. gleichwertig die Beschränktheit von u. Nun haben wir unendlich viele Matrizennormen gegeben. Aus dem Axiom (R_2')

von Ruan folgt, dass die Matrizennorm auf $M_n(E)$ für $n \leq m$ die Einschränkung der Matrizennorm auf $M_m(E)$ ist. Damit erhalten wir für den linearen Raum $M := \cup_{n\geq 1} M_n$ eindeutig eine Norm α auf $M \otimes E$. Umgekehrt gewinnt man aus α alle Matrizennormen zurück. Wir verlangen nun von u, dass

$$id \otimes u : M \otimes E \to M \otimes F$$

beschränkt ist. Dass ist aber genau dann der Fall, wenn $id \otimes u : M_n \otimes E \to M_n \otimes F$ *gleichmäßig* über alle $n \geq 1$ beschränkt ist. Augrund dieser Überlegung definieren wir:

Seinen E und F Operatorräume. Sei $u : E \to F$. Dann ist u ein Operatorraummorphismus, wenn u linear ist und

$$\|u\|_{cb} := \sup_{n\geq 1} \|id \otimes u : M_n \otimes E \to M_n \otimes F\| < \infty\,.$$

u nennen wir dann eine *vollständig beschränkte Abbildung.*

Nach einem üblichen Prinzip können wir nun die Operatorraumisomorphismen definieren: Seien E und F Operatorräume. E und F sind isomorphe Operatorräume, oder man sagt E und F sind *vollständig isomorph*, wenn es eine lineare Bijektion $u : E \to F$ gibt, sodass sowohl u als auch u^{-1} vollständig beschränkt sind. Umgekehrt heißt jede solche Abbildung u mit den genannten Eigenschaften ein *vollständiger Isomorphismus.*

Ruan konnte folgendes zeigen.

Satz 1.1 (R)
Für jeden Operatorraum E lässt sich eine C^*-Algebra A finden, sodass E vollständig isometrisch in A eingebettet ist.

Beweis 1
Ich möchte kurz umreißen, wie man zu der C^*-Algebra kommt. Die nimmt nämlich eine ziemlich konkrete Form an. Ich verwende hier aber schon Resultate aus dem Kapitel "Direkte Summen". Man mag also vorerst den Beweis überspringen.
Sei also E ein Operatorraum. Ruan zeigte, dass es dann für jedes $n \geq 1$ und jedes $x \in M_n(E)$ eine vollständig kontraktive Abbildung $u : E \to M_n$ gibt mit

$$\|u_n(x)\|_{M_n(M_n)} = \|x\|_{M_n(E)}\,. \tag{2}$$

Sei nun S_n die Einheitskugel in $cb(E, M_n)$. Man setzt

$$A := \oplus_{n\geq 1} \oplus_{u\in S_n} M_n$$

Vermöge $T : E \to A : e \mapsto \oplus_{n\geq 1} \oplus_{u\in S_n} u(e)$, also $T = \oplus_n(\oplus_u u)$, erhält man klarerweise eine vollständige Kontraktion, da $\|u\|_{cb} \leq 1$ für alle u.
Es ist aber T auch eine vollständige Isometrie:

$M_N \otimes A = \oplus_n \oplus_u (M_N \otimes M_n)$ und $id_N \otimes T$ wird zu $\oplus_n \oplus_u (id_N \otimes u)$. Sei $x \in M_N \otimes E$ und $v : E \to M_N$ die zugehörige Abbildung gemäß (2). Dann ist

$$\|(id_N \otimes T)(x)\|_{M_N(A)} = \| \oplus_n \oplus_u (id_N \otimes u)(x)\| \geq \|(id_N \otimes v)(x)\|_{M_N(M_N)} = \|x\|_{M_N(E)}$$

□

Der Satz von Ruan besagt, dass jeder Operatorraum ein Teilraum von $B(h)$ ist gemäß $E \subseteq A \subseteq B(h)$ und begründet die in der Einleitung gegebene Definition eines Operatorraumes.

Korollar 1.2
Sei E ein endlichdimensionaler oder separabler Operatorraum. Dann ist

$$E \subseteq B(l^2(\mathcal{N})) \qquad \textit{vollständig isometrisch.}$$

Beweis 2
Man kann leicht den Satz von Ruan 1.1 so modifizieren, um das zu zeigen. Sei E_0 eine abzählbare, dichte Teilmenge in E. Sei $n \geq 1$ fest. Dann liegt klarerweise $Q_n := M_n(E_0)$ dicht in $M_n(E)$, d.h. $M_n(E)$ ist separabel. Für $x \in Q_n$ sei u_x jene vollständige Kontraktion $E \to M_n$, die (2) erfüllt. Setze $S_n := \{ u_x \mid x \in Q_n \}$, also S_n ist abzählbar. Wie in Beweis 1 setze

$$A := \oplus_{n\geq 1} \oplus_{u \in S_n} M_n \quad \subseteq B(l^2)\,.$$

Klarerweise ist $T : E \to A$ eine vollständige Kontraktion, T wie in Beweis 1. Und wie in Beweis 1 dargelegt, ist $id_N \otimes T$ eine Isometrie auf Q_n, aber damit auch auf $M_n(E)$ aus Stetigkeitsgründen. Also ist T eine vollständige Isometrie. □

Neben dem Satz von Ruan ist der folgende Satz von Wittstock/Paulsen fundamental für die Operatorraumrechnung.

Für den folgenden Satz beachte man, dass für zwei Hilberträume $h \subseteq H$ die C^*-Algebra $B(h)$ *-homomorph in $B(H)$ enthalten ist. Und damit auch vollständig isometrisch als Operatorraum $B(h) \subseteq B(H)$. Natürlich, indem man H zerlegt in der Form $H = h \oplus h^\perp$ und ein $T \in B(h)$ abbildet auf $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(h \oplus h^\perp)$. Wenn nichts anderes gesagt wird, sei immer diese natürliche Einbettung gemeint, wenn man $h \subseteq H \Rightarrow B(h) \subseteq B(H)$ folgert.

Satz 1.3 (P2, p57 Theorem 3.6)
Sei $E \subseteq B(k)$ ein Operatorraum (k, h Hilbert).
*(i) Sei $u : E \to B(h)$ vollständig beschränkt. Dann gibt es einen Hilbertraum $H \supseteq h$, und Elemente $V_1, V_2 \in B(H)$ und einen *-homomorphismus $\pi : B(k) \to B(H)$, sodass*

$$u(x) = V_1 \pi(x) V_2 \tag{3}$$

für alle $x \in E$, wobei

$$\|u\|_{cb} \geq \|V_1\|\|V_2\|$$

*(ii) Seien umgekehrt A, B C^*-Algebren und $\pi : A \to B$ ein *-homomorphismus und sei $u : A \to B$ eine Abbildung von der Form (3) mit festen $V_1, V_2 \in B$. Dann ist u vollständig beschränkt mit $\|u\|_{cb} \leq \|V_1\|\|V_2\|$.*

Diese Version ist etwas ungewöhnlich. Wenn $u : E \to B(h)$ vollständig beschränkt ist, so gilt folgende wohl gängigere Version des Satzes:
Es gibt einen Hilbertraum $\tilde{h}$, einen *-homomorphismus $\tilde{\pi} : B(k) \to B(\tilde{h})$ und beschränkte Abbildungen $\tilde{V}_1 : \tilde{h} \to h$ und $\tilde{V}_2 : h \to \tilde{h}$, sodass $u(x) = \tilde{V}_1\tilde{\pi}(x)\tilde{V}_2$ für alle $x \in E$ und $\|u\|_{cb} \geq \|\tilde{V}_1\|\,\|\tilde{V}_2\|$. Bettet man hier $B(h)$ in $B(h \oplus \tilde{h})$ ein, so erhält man

$$u(x) = \begin{pmatrix} \tilde{V}_1\tilde{\pi}(x)\tilde{V}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{V}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\pi}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{V}_2 & 0 \end{pmatrix} =: V_1\pi(x)V_2\,.$$

Setzt man hier $H := h \oplus \tilde{h}$, so ist $\|u\|_{cb} \geq \|\tilde{V}_1\|\,\|\tilde{V}_2\| = \|V_1\|\,\|V_2\|$ und 1.3.(i) erhalten.

Wenn man die Abbildung u nach der Vorschrift $v(x) := \tilde{V}_1\tilde{\pi}(x)\tilde{V}_2$ auf ganz $B(k)$ ausdehnt, so kann man leicht nachrechnen, dass v vollständig beschränkt bleibt mit $\|v\|_{cb} = \|\tilde{V}_1\|\,\|\tilde{V}_1\| = \|u\|_{cb}$. Vermerken wir diese wohlbekannte Folgerung:

Korollar 1.4
Seien $E \subseteq F$ Operatorräume und $u : E \to B(h)$ vollständig beschränkt. Dann lässt sich u fortsetzen zu einer vollständig beschränkten Abbildung $v : F \to B(h)$ mit $\|v\|_{cb} = \|u\|_{cb}$.

Zum Test, ob eine Abbildung ein (isometrischer) Banachraumisomorphismus ist, verwende ich gerne folgendes, völlig elementare Lemma. Gerade bei der Tensorraumrechnung ist es brauchbar, da in aller Regel Funktionsvorschriften nur auf dem (dicht liegenden) algebraischen Tensorprodukt gegeben sind.

Lemma 1.5
Seien X, Y Banachräume und $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ dicht liegende Teilräume in X bzw. Y. Sei $\Phi : X_0 \to Y_0$ eine lineare Bijektion und seien $\|\Phi\| < \infty$ und $\|\Phi^{-1}\| < \infty$. Dann sind die stetigen Fortsetzungen $\overline{\Phi} : X \to Y$ und $\overline{\Phi^{-1}} : Y \to X$ Banachraumisomorphismen und es gilt $\overline{\Phi}^{-1} = \overline{\Phi^{-1}}$.
Gelten zuätzlich $\|\Phi\| \leq 1$ und $\|\Phi^{-1}\| \leq 1$, dann ist $\overline{\Phi}$ sogar ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis 3
Schränkt man die stetige Abbildung $\overline{\Phi^{-1}} \circ \overline{\Phi} : X \to X$ auf X_0 ein, so ist sie dort die Identität. Da id_X eine stetige Fortsetzung dieser Einschränkung ist und die stetige Fortsetzung eindeutig bestimmt ist, muss gelten: $\overline{\Phi^{-1}} \circ \overline{\Phi} = id_X$. Mit der selben Argumentazion muss $\overline{\Phi} \circ \overline{\Phi^{-1}} = id_Y$ gelten. Nach einer Rechenregel ist nun $\overline{\Phi}$ eine Bijektion mit $\overline{\Phi}^{-1} = \overline{\Phi^{-1}}$.
Wenn nun $\|\Phi\| \leq 1$ und $\|\Phi^{-1}\| \leq 1$ gelten, so prüft man leicht nach, dass Φ eine Isometrie auf X_0 ist. Damit ist aber die stetige Fortsetzung $\overline{\Phi}$ ebenfalls eine Isometrie. $\square$

Lemma 1.6

Seien E, F Operatorräume und sei $E_0 \subseteq E$ dicht in E bezüglich der Norm auf E. Sei $u_0 : E_0 \to F$ linear und vollständig beschränkt. Dann lässt sich u_0 eindeutig stetig fortsetzen zu $u : E \to F$ und es gilt $\|u_0\|_{cb} = \|u\|_{cb}$.

Beweis 4

Man setze einfach u_0 eindeutig stetig auf E fort. Man zeigt leicht, dass $M_n \otimes E_0$ dicht liegt in $M_n \otimes E$, d.h. $id_n \otimes u$ ist die stetige Fortsetzung von $id_n \otimes u_0$. Also erhält man auf allen Matrizenstufen die gleiche Norm: $\|u\|_n = \|u_0\|_n \ \forall n \geq 1$. $\square$

Kombination von 1.5 und 1.6 liefert unmittelbar:

Lemma 1.7

Seien E, F vollständige Operatorräume und $E_0 \subseteq E$, $F_0 \subseteq F$ dicht liegende Teilräume in E bzw. F. Sei $\Phi : E_0 \to F_0$ eine lineare Bijektion und seien $\|\Phi\|_{cb} < \infty$ und $\|\Phi^{-1}\|_{cb} < \infty$. Dann sind die stetigen Fortsetzungen $\overline{\Phi} : X \to Y$ und $\overline{\Phi^{-1}} : Y \to X$ Operatorraumisomorphismen und es gilt $\overline{\Phi}^{-1} = \overline{\Phi^{-1}}$.

Gelten zuätzlich $\|\Phi\|_{cb} \leq 1$ und $\|\Phi^{-1}\|_{cb} \leq 1$, dann ist $\overline{\Phi}$ sogar ein vollständig isometrischer Isomorphismus.

WICHTIGER HINWEIS:

In Zukunft sollen alle Operatorräume immer vollständig angenommen werden! Das ist für viele aus Operatorräumen abgeleitete Konstruktionen einfach nötig.

2 Das minimale Tensorprodukt

Lemma 2.1

Seien A, B, C C^*-Algebren. Dann gelten

*(i) Sei $T : A \to B$ ein *-homomorphismus. Dann ist $T \otimes id : A \otimes_{min} C \to B \otimes_{min} C$ eine Kontraktion.*

(ii) Sei A eine eine C^*-Teilalgebra von B. Dann ist $A \otimes_{min} C \subseteq B \otimes_{min} C$ als C^*-Algebren.

(iii) Seien h,k Hilberträume. Dann gilt als C^*-Algebren

$$B(h) \otimes_{min} B(k) \subseteq B(h \otimes_2 k)$$

Beweis 5

(i) Man beachte die Definition des minimalen Tensorproduktes:

$$\|z\|_{A \otimes_{min} C} = \sup\{ \|(\varphi \otimes \psi)(z)\|_{B(h \otimes_2 k)} \mid h, k \text{ Hilbert}, \ \varphi : A \to B(h), \psi : C \to B(k) \text{ Darst.} \}.$$

In der folgenden Rechnung sind die Suprema sind über alle Darstellungen $\tilde{\varphi} : A \to B(h)$, $\varphi : B \to B(h)$ und $\psi : C \to B(k)$ und alle Hilberträume h, k zu nehmen. Sei z aus dem algebraischen Tensorprodukt von $A \otimes B$.

$$\|(T \otimes id)(z)\|_{B \otimes_{min} C} = \sup \|(\varphi \otimes \psi)(T \otimes id)(z)\|_{B(h \otimes_2 k)} = \sup \|(\varphi T \otimes \psi)(z)\|_{B(h \otimes_2 k)}$$

$$\leq \sup \|(\tilde{\varphi} \otimes \psi)z\|_{B(h \otimes_2 k)} = \|z\|_{A \otimes_{min} C}$$

(ii) Wenn T die Einbettung ist, so ist T mit (i) eine Kontraktion. Anderenseits muss $\|z\|_{min} \leq \|T(z)\|$ wegen der Minimalität des minimalen Tensorproduktes.
(iii) Sei $T : B(h) \otimes B(k) \to B(h \otimes_2 k)$ der übliche, treue *-homomorphismus. So ist nur noch die Isometrie zu zeigen: Es ist notwendig $\|z\|_{min} \leq \|T(z)\|_{B(h \otimes_2 k)}$. Und umgekehrt ist $\|z\|_{min} = \sup \|(\varphi \otimes \psi)(z)\|_{B(h' \otimes_2 k')} \geq \|(id \otimes id)(z)\|_{B(h \otimes_2 k)} = \|T(z)\|_{B(h \otimes_2 k)}$. □

Proposition 2.2
(i) Seien h,k,l Hilberträume. Dann gelten isometrisch

$$h \otimes_2 k = k \otimes_2 h \qquad \text{und} \quad (h \otimes_2 k) \otimes_2 l = h \otimes_2 (k \otimes_2 l)$$

(ii) Seien A,B,C C^*-Algebren. Dann gelten

$$A \otimes_{min} B = B \otimes_{min} A \qquad \text{und} \qquad (A \otimes_{min} B) \otimes_{min} C = A \otimes_{min} (B \otimes_{min} C)$$

als C^*-Algebren.

Beweis 6
(i) Man zeigt ganz leicht, dass $h \otimes k \to k \otimes_2 h$ und $(h \otimes k) \otimes l \to h \otimes_2 (k \otimes_2 l)$ Isometrien sind und setzt Isometrisch fort, da aufgrund der Crossnormeigenschaft etwa $(h \otimes k) \otimes l$ dicht in $(h \otimes_2 k) \otimes_2 l$ liegt. Für die inverse Abbildung gilt das gleiche und man ist fertig. D.h. die hier vorkommenden Hilberträume sind äquivalent.
(ii) Mit (i) gilt $B(h \otimes_2 k) = B(k \otimes_2 h)$ und $B((h \otimes_2 k) \otimes_2 l) = B(h \otimes_2 (k \otimes_2 l))$. Damit findet man einen isometrischen *-homomorphismus

$$[B(h) \otimes B(k)] \otimes B(l) \to B(h \otimes_2 k) \otimes_{min} B(l) \to B((h \otimes_2 k) \otimes_2 l) \to B(h \otimes_2 (k \otimes_2 l))$$

$$\to B(h) \otimes_{min} [B(k) \otimes_{min} B(l)]\,,$$

denn man stetig auf $[B(h) \otimes_{min} B(k)] \otimes_{min} B(l)$ fortsetzt. Für die inverse Abbildung macht man das gleiche und man ist für diesen Spezialfall fertig. Jetzt kann man aber für $A \subseteq B(h)$, $B \subseteq B(k)$ und $C \subseteq B(l)$ wegen der Injektivität des minimalen Tensorproduktes (siehe 2.1.(ii)) ganz analog isometrisch umbetten. □

Definition 2.3
Seien E,F Operatorenräume mit $E \subseteq B(h)$, $F \subseteq B(k)$, wo h,k Hilbert, so ist das minimale Tensorprodukt von E und F definiert als der Abschluss von $E \otimes F$ in $B(h) \otimes_{min} B(k)$. Also

$$E \otimes_{min} F \subseteq B(h) \otimes_{min} B(k)\,.$$

$E \otimes_{min} F$ definiert also einen neuen Operatorraum. Insbesondere ist also das minimale Tensorprodukt von Operatorenräumen der Abschluss in $B(h \otimes_2 k)$ mit 2.1.(iii).

Unmittelbar aus der Definition 2.3 folgt, dass für einen Operatorraum $E \subseteq B(h)$ die Matrizennormen auf E mit der Norm auf $M_n \otimes_{min} E$ übereinstimmt: Tatsächlich ist nach dem Satz von Ruan 1.1 $M_n(E)$ isometrisch in $M_n(B(h))$ eingebettet und man erhält isometrisch

$$M_n \otimes E \subseteq M_n \otimes_{min} E \subseteq M_n \otimes_{min} B(h)$$

Es ist noch nicht gesichert, ob obige Definition wirklich nur von den Operatorräumen E und F abhängt. Es könnte sich ja $E \otimes_{min} F$ ändern, wenn man E statt in $B(h)$ in einen anderen Raum $B(k)$ einbettet. Dass das nicht der Fall ist, garantiert der Punkt (ii) folgender Propostion.

Proposition 2.4
Seien E_1, E_2, F_1, F_2 Operatorräume und $E_1 \subseteq B(h_1), E_2 \subseteq B(h_2), F_1 \subseteq B(k_1), F_2 \subseteq B(k_2)$ irgendeine gewählte Einbettung. Seien $E_1 \otimes_{min} E_2$ und $F_1 \otimes_{min} F_2$ von dieser speziellen Einbettung abgeleitet. Dann gelten
(i) Sind $u : E_1 \to E_2$, $v : F_1 \to F_2$ c.b., so ist $u \otimes v : E_1 \otimes_{min} F_1 \to E_2 \otimes_{min} F_2$ c.b. mit

$$\|u \otimes v\|_{cb(E_1 \otimes_{min} F_1, E_2 \otimes_{min} F_2)} \leq \|u\|_{cb} \|v\|_{cb}$$

(ii) Sind $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, so ist $E_1 \otimes_{min} F_1 = E_2 \otimes_{min} F_2$ als Operatorräume.
(iii) Ist $E_1 \subseteq E_2$, so ist $E_1 \otimes_{min} F_1 \subseteq E_2 \otimes_{min} F_1$ als Operatorräume.

Beweis 7
(i) Da etwa $E_1 \subseteq B(h_1)$ und $F_1 \subseteq B(k_1)$, so sind $E_1, F_1 \subseteq B(h_1 \oplus h_2)$ und per Definition des minimalen Tensorproduktes $E_1 \otimes_{min} F_1 \subseteq B(h_1) \otimes_{min} B(h_2) \subseteq B(h_1 \oplus h_2) \otimes_{min} B(h_1 \oplus h_2)$. Man mag also o.B.d.A. einen Hilbertraum h annehmen, sodass $E_1, F_1, E_2, F_2 \subseteq B(h)$ gilt. Mit Satz 1.3 gibt es Hilberträume $H_1, H_2 \supseteq h$ und Darstellungen

$$\pi : B(h) \to B(H_1) \quad \text{und} \quad \sigma : B(h) \to B(H_2)$$

und Elemente $V_1, V_2 \in B(H_1)$ und $W_1, W_2 \in B(H_2)$, sodass

$$u(e) = V_1 \pi(e) V_2 \qquad v(f) = W_1 \sigma(f) W_2$$

Nun ist

$$\pi \otimes \sigma : B(h) \otimes_{min} B(h) \to B(H_1) \otimes_{min} B(H_2)\,,$$

ein *-homomorphismus, sodass sich folgende Rechnung in $B(H_1) \otimes B(H_2)$ ergibt ($\sum_k x_k \otimes y_k \in B(h) \otimes B(h)$)

$$(u \otimes v)(\sum_k x_k \otimes y_k) = \sum_k V_1 \pi(x_k) V_2 \otimes W_1 \sigma(y_k) W_2 = \sum_k (V_1 \otimes W_1)(\pi(x_k) \otimes \sigma(y_k))(V_2 \otimes W_2)$$

$$= (V_1 \otimes W_1) \quad (\pi \otimes \sigma)(\sum_k x_k \otimes y_k) \quad (V_2 \otimes W_2) \tag{4}$$

Es lässt sich also $u \otimes v$ stetig auf $B(h) \otimes_{min} B(h)$ fortsetzen und wegen der speziellen Form von (4) Satz 1.3.(ii) anwenden, womit

$$\|u \otimes v\|_{cb(B(h)\otimes_{min}B(h),B(H_1)\otimes_{min}B(H_2)} \leq \|V_1 \otimes W_1\|_{B(H_1)\otimes_{min}B(H_2)}\|V_1 \otimes W_1\|_{B(H_1)\otimes_{min}B(H_2)}$$

$$= \|V_1\|\|W_1\|\|V_2\|\|W_2\| = \|u\|_{cb}\|v\|_{cb}$$

Insbesondere ist $u \otimes v$ vollständig beschränkt auf $E_1 \otimes_{min} F_2$.

(ii) Seien invertierbare, vollständige Isometrien $u : E_1 \to E_2$ und $u : F_1 \to F_2$ gegeben, d.h. $\|u^{-1}\|_{cb} = \|u\|_{cb} = \|v^{-1}\|_{cb} = \|v\|_{cb} = 1$. Dann ist mit (i) $\|u \otimes v\|_{cb} \leq \|u\|_{cb}\|v\|_{cb} = 1$. Und analog gilt für die inverse Abbildung $\|u^{-1} \otimes v^{-1}\|_{cb} \leq 1$. Also sind $E_1 \otimes_{min} F_1$ und $E_2 \otimes_{min} F_2$ äquivalente Operatorräume wegen 1.7.

(iii) Sei $E_1 \subseteq E_2 \subseteq A$ vollständig isometrisch und $F_1 \subseteq B$ vollständig isometrisch, wo A, B C^*-Algebren sind. Dann sind $E_1 \otimes_{min} F_1$ und $E_2 \otimes_{min} F_1$ die Abschlüsse in $C := A \otimes_{min} B$. Da $E_1 \otimes F_1 \subseteq E_2 \otimes F_1$ als lineare Räume in C, gilt für deren Abschlüsse: $E_1 \otimes_{min} F_1 \subseteq E_2 \otimes_{min} F_1$ in C. Da alle Matrizennormen von C geholt werden, sind die Matrizennormen von $E_1 \otimes F_1$ die von $E_2 \otimes_{min} F_1$. $\square$

Die Assoziativität und Kommutativität des minimalen Tensorproduktes von C^*-Algebren überträgt sich direkt auf das minimale Tensorprodukt von Operatorräumen. Also Lemma.

Lemma 2.5
Seien E, F, G Operatorräume. So gelten vollständig isometrisch

$$E \otimes_{min} F = F \otimes_{min} E \quad \text{und} \quad (E \otimes_{min} F) \otimes_{min} G = E \otimes_{min} (F \otimes_{min} G)$$

Proposition 2.6
Seien E_1, E_2, F_1, F_2 Operatorräume und $u : E_1 \to E_2$, $v : F_1 \to F_2$ vollständig beschränkt. Dann gilt

$$\|u \otimes v\|_{cb(E_1\otimes_{min}F_1,E_2\otimes_{min}F_2)} = \|u\|_{cb}\|v\|_{cb}$$

Beweis 8
Die Abschätzung $\leq$ wurde schon in 2.4 gezeigt. Es bleibt also nur noch die Abschätzung $\geq$ zu zeigen:
Sei $\varepsilon > 0$ fest. Sei $id_N \otimes u : M_N \otimes E_1 \to M_N \otimes E_2$. Wähle ein $N \geq 1$ so groß und $a \in M_N \otimes E_1$ und $b \in M_N \otimes F_1$ mit $\|a\| \leq 1$ und $\|b\| \leq 1$, sodass

$$\|(id_N \otimes u)(a)\|_{M_N\otimes_{min}E_2} \geq \|u\|_{cb} - \varepsilon \quad \text{und} \quad \|(id_N \otimes v)(b)\|_{M_N\otimes_{min}F_2} \geq \|v\|_{cb} - \varepsilon\,.$$

Es ist $a \otimes b \in [M_N \otimes_{min} E_1] \otimes_{min} [M_N \otimes_{min} F_1]$ mit $\|a \otimes b\| \leq 1$ und es folgt

$$\|\,[(id_N \otimes u) \otimes (id_N \otimes v)]\,(a \otimes b)\,\|_{[M_N\otimes_{min}E_2]\otimes_{min}[M_N\otimes_{min}F_2]} \geq (\|u\|_{cb} - \varepsilon)(\|v\|_{cb} - \varepsilon)\,.$$

Wegen der Assoziativität und der Kommutativität des minimalen Tensorproduktes von Operatorräumen ist

$$[M_N \otimes_{min} E_1] \otimes_{min} [M_N \otimes_{min} F_1] = [M_N \otimes_{min} M_N] \otimes_{min} [E_1 \otimes_{min} F_1]$$

und analog für E_2 und F_2. Dieser Gleichheit folgend wird $(id_N \otimes u) \otimes (id_N \otimes v)$ zu $(id_N \otimes id_N) \otimes (u \otimes v)$. Man kann $M_N \otimes M_N = M_N(M_N)$ auf natürliche Art zu M_{N^2} umschreiben und es ist damit $M_N \otimes M_N = M_{N^2}$ vermittels eines *-homomorphismus.
Analog fasse man $a \otimes b$ als Element in $C := M_{N^2} \otimes_{min} E_1 \otimes_{min} F_1$ auf und es bleibt $\|a \otimes b\|_C \leq 1$ und man findet

$$\|u \otimes v\|_{cb} \geq \|(id_{N^2} \otimes u \otimes v)(a \otimes b)\|_{M_{N^2} \otimes_{min} E_2 \otimes_{min} F_2} \geq (\|u\|_{cb} - \varepsilon)(\|v\|_{cb} - \varepsilon) .$$

Da ε beliebig war, gilt die Behauptung. □

Proposition 2.7 (Lemma von Auerbach)
Sei $X := \mathcal{C}^n$ und $\|.\|$ eine Norm auf X. Dann gelten
(i) Es gibt eine Basis $x_1, ..., x_n \in X$ mit $\|x_i\| = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$, sodass auch die biorthogonalen Elemente $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$ erfüllen: $\|x_i^*\| = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$.
(ii) Es gibt eine lineare Transformation $T : X \to X$, sodass

$$\|x\|_\infty \leq \|T(x)\| \leq \|x\|_1 \qquad \forall x \in X .$$

Beweis 9
(i) Ich halte mich hier an den Beweis von [Wo, II.E. 11 Lemma] dieses zuerst von Auerbach gezeigten Lemmas.
Es gibt aus Kompaktheits-Setitigkeitsgründen Elemente $x_1, ..., x_n \in X$, sodass

$$|det(x_1, ..., x_n)| = \max \left\{ |det(y_1, ..., y_n)| \,\middle|\, y_i \in X, \|y_i\| \leq 1 \right\}. \tag{5}$$

Also $\|x_i\| \leq 1$ aber sogar $\|x_i\| = 1$ für alle i, da die Determinante n-linear ist. Setze nun

$$x_i^*(x) := det(x_1, .., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n)\, det(x_1, ..., x_n)^{-1} .$$

Tatsächlich sind die x_i^* die biorthogonalen Funktionale zu den x_i und wegen (5) ist $|x_i^*(x)| \leq 1$ für alle $\|x\| \leq 1$.

(ii) Seien $x_1, ..., x_n$ wie in (i) gewählt und $(e_i)_i$ die kanonischen Basis in X. Dann betrachte die lineare Transformation $T : e_i \mapsto x_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist

$$\alpha := \|T(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)\| = \|\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\| \leq |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| ,$$

und unter Beachtung, dass für alle i das Funktional x_i^* Norm 1 hat, ergibt sich

$$\alpha = \|\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\| \geq |x_i^* (\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n)| = |\lambda_i| .$$

□

Lemma 2.8

Sei F ein endlichdimensionaler Operatorraum mit $dim(F) = n$. Sei $\{f_1, ..., f_n\}$ eine Basis von F.

(i) Dann gibt es ein festes $M > 0$, sodass für alle Operatorräume E gilt

$$\|e_j \otimes f_j\|_{F\otimes_{min}E} \leq M \, \|\sum_i e_i \otimes f_i\|_{F\otimes_{min}E} \qquad \forall e_1, ..., e_n \in E \; \forall j \,. \tag{6}$$

(ii) Man kann sich die Basis $\{f_1, ..., f_n\}$ so wählen, dass (6) für $M := 1$ erfüllt ist.

(iii) Insbesondere ist $(E \otimes F, min)$ schon vollständig.

(iv) Zudem sind $E \otimes_{min} F$ und E^n isomorphe Banachräume.

Beweis 10

Sei $1 \leq j \leq n$ fest. Man wähle sich zu f_j ein biorthogonales Funktional $f^* \in F^*$, also $f^*(f_j) = 1$ und $f^*(f_i) = 0$ sonst. Dann betrachte die Abbildung $f_j \otimes f^* : F \to F : f \mapsto f^*(f)f_j$. Bezeichne sie mit φ. φ ist als eindimensionale Abbildung im Prinzip ein Funktional und damit vollständig beschränkt, wobei $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi\| = \|f^*\| \, \|f_j\|$. Damit ist $id \otimes \varphi : E \otimes_{min} F \to E \otimes_{min} F$ beschränkt mit $\|id \otimes \varphi\| \leq \|\varphi\|_{cb} = \|f^*\| \, \|f_j\| =: M_j$. Wertet man $id \otimes \varphi$ in $\sum_i e_i \otimes f_i$ aus, so folgt die erste Behauptung. Wegen 2.7.(ii) gilt die zweite Behauptung.

Mit Ungleichung (6) zeigt man leicht, dass $E \otimes F$ vollständig ist.

Zum letzten Punkt: Überführe $(e_1, ..., e_n) \in E^n$ nach $\sum_i e_i \otimes f_i \in E \otimes F$. Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv und stetig. Da schon $(E \otimes F, min)$ vollständig ist, folgt die Behauptung.

□

Lemma 2.9

Sei F ein n-dimensionale Operatorraum und E ein beliebiger Operatorraum. Dann gelten:

(i) Jede lineare Abbildung $u : F \to E$ ist vollständig beschränkt mit

$$\|u\|_{cb} \leq n \, \|u\|. \tag{7}$$

(ii) Ist $u : E \to F$ beschränkt, so ist u vollständig beschränkt mit (7).

Beweis 11

(i) Ich schätze $id_m \otimes u : M_m \otimes F \to M_m \otimes E$ ab. Wegen 2.8.(ii) kann man sich eine Basis $f_1, ..., f_n$ in F wählen, sodass für alle $j = 1, ..., n$ gilt: $\|x_j \otimes f_j\| \leq \|\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i\|$ für alle $x_i \in M_m$. Es ist damit

$$\|(id \otimes u)(\sum_i x_i \otimes f_i)\| = \|\sum_i x_i \otimes u(f_i)\| \leq n \, \|u\| \, \max_i \|x_i \otimes f_i\| \leq n \, \|u\| \, \|\sum_i x_i \otimes f_i\|$$

(ii) Ich verwende hier schon Aussagen über Quotientenoperatorräume. Man mag diesen Beweis vorerst überspringen. Der Punkt (ii) wird im Kapitel "Quotientenräume" nicht verwendet, sodass die Reihenfolge in der Logik stimmt.

Betrachte $\tilde{u} : E/ker(u) \to F$. Sicher ist $E/ker(u)$ maximal n-dimensional und mit (i) ist $\|u\|_{cb} = \|\tilde{u}\|_{cb} \leq n \, \|u\|$. □

Ich möchte noch auf folgendes hinweisen:
Das minimale Tensorprodukt zwischen zwei C^*-Algebren definiert ja die kleinste C^*-Crossnorm auf dem algebraischen Tensorprodukt. Das minimale Tensorprodukt von Operatorräumen definiert allerdings nicht die kleinste Crossnorm, also in dem Sinne, dass auch alle Matrizennormen möglichst minimal sind. Diese kleinste Crossnorm kann man nämlich angeben und unterscheidet sich von dem hier in diesem Kapitel behandelten minimalen Tensorprodukt:
Tatsächlich, seien E,F Operatorräume. Dann bildet die kleinste Crossnorm auf $E \otimes F$ das injektive Tensorprodukt, also $E \check{\otimes} F$. Es gilt nun aber, jeder normierte Raum lässt sich zu einem Operatorraum machen, so, dass die Norm erhalten bleibt und die Matrizennormen minimal sind, d.h. jede andere Operatorraumstruktur hat auf allen Matrizenstufen größere oder gleich große Norm. Es ist dies die "minimale Operatorraumstruktur" und kann etwa in [P2] nachgelesen werden. Also statte $E \check{\otimes} F$ mit der minimalen Operatorraumstruktur aus. Dieser Raum ist der gewünschte Operatorraum. Sind nun E,F C^*-Algebren, so muss ja tatsächlich nicht $E \otimes_{min} F = E \check{\otimes} F$ gelten.

3 Die Axiome von Ruan

Folgendes Lemma ist für die Operatorraumrechnung von einigem Nutzen.

Lemma 3.1
(i) Sei $l^2 = l^2(\mathcal{N})$. Sei $n \geq 1$. Dann ist M_n eine C^*-Teilalgebra von $B(l^2)$ vermöge

$$M_n \to B(l^2) : T \mapsto \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{l^2_n \oplus l^2(n+1,n+2,\ldots) \to l^2_n \oplus l^2(n+1,n+2,\ldots)} .$$

Fasst man so M_n als Teilraum von $B(l^2)$ auf, so ist $M := \cup_{n \geq 1} M_n$ ein linearer Teilraum von $B(l^2)$. Es liegt M dicht im Raum K der kompakten Operatoren auf l^2.
(ii) Seien F, E Operatorräume und F endlichdimensional, also $F \subseteq B(l^2)$ wegen 1.2. Sei $P_n : l^2 \to l^2$ die Projektion auf l^2_n. Sei $z = \sum_i f_i \otimes e_i \in F \otimes_{min} E$. Dann ist
$\|z\|_{F \otimes_{min} E} = \lim_{n \geq 1} \| \sum_i P_n f_i P_n \otimes e_i \|_{M_n \otimes E}$ und statt $\lim_n$ kann man auch $\sup_n$ nehmen.

Beweis 12
(i) Es genügt zu zeigen, dass M dicht liegt im Raum der endlichdimensionalen Operatoren. Sei P_n die Projektion $P_n : B(l^2) \to B(l^2) : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, 0, 0, \ldots)$. Für alle $T \in B(l^2)$ ist $P_n T P_n \in M_n$. Sei $T \in B(l^2)$ eindimensional, also im Prinzip ein lineares Funktional. Dann gibt es $e, f \in l^2$, sodass T von der Form $T(x) = e < x, f >$ ist. Also ist

$$\|(P_n T P_n - T)(x)\| = \|P_n e < P_n x, f > - e < x, f > \|$$

$$= \|P_n e < x, P_n f > - P_n e < x, f > + P_n e < x, f > - e < x, f > \|$$

$$\leq \|P_n e\| \, \|x\| \, \|P_n f - f\| + \|P_n e - e\| \, \|x\| \, \|f\| . \qquad (8)$$

Für ein festes n groß genug ist (8) $\leq \varepsilon\|x\|$, also $\|P_nTP_n - T\| \leq \varepsilon$ und d.h. die eindimensionalen Operatoren lassen sich beliebig genau durch Elemente aus M approximieren.
Sei nun T endlichdimensional, etwa mit Bild $E := lin\{e_1, ..., e_n\}$. Seien $p_i : E \to e_i$ die Projektionen auf e_i, so ist $T(x) = p_1(T(x)) + ... + p_n(T(x))$, und also ist T Summe von eindimensionalen Operatoren und der Beweis ist leicht zu vollenden.

(ii) Sei $E \subseteq B(h)$. Dann ist $z \in B(l^2 \otimes_2 h)$. $\|z\| \approx \|z(\xi)\|$ für ein ξ mit $\|\xi\|_{l^2 \otimes_2 h} = 1$. Sei $Q_n := P_n \otimes 1_{B(h)}$. Es ist $\lim_n \|Q_n(\eta) - \eta\| = 0 \,\forall \eta \in l^2 \otimes_2 h$, also $\|Q_n z Q_n(\xi) - z(\xi)\| \leq \|Q_n\| \, \|z\| \, \|Q_n(\xi) - \xi\| + \|Q_n z(\xi) - z(\xi)\| \to 0$. Damit ist $\|z\| \approx \|z(\xi)\| = \lim_n \|Q_n z Q_n(\xi)\| \leq \lim_n \|Q_n z Q_n\| \leq \sup_n \|Q_n z Q_n\| \leq \|z\|$. □

Man beachte folgendes:
Wegen 3.1 liegt $M := \cup_{n\geq 1} M_n$ dicht in K. Fasst man $M \subseteq K$ als Teiloperatorraum von K auf und ist E ein Operatorraum, so liegt $M \otimes_{min} E$ dicht in $K \otimes_{min} E$ aufgrund der Crossnormeigenschaft des minimalen Tenorproduktes. Zudem gilt vollständig isometrisch

$$M_n \otimes_{min} E \subseteq M \otimes_{min} E \subseteq K \otimes_{min} E \tag{9}$$

Gilles Pisier hat nun folgendes beobachtet.

Proposition 3.2
Seien E, F Operatorräume und K die Menge der kompakten Operatoren auf l^2. Sei $u : E \to F$ linear. Wenn man $id \otimes u : K \otimes_{min} E \to K \otimes_{min} F$ betrachtet, so erhält man folgende Aussagen.
(i) u ist vollständig beschränkt $\Leftrightarrow$ $id \otimes u$ beschränkt ist und es gilt

$$\|u\|_{cb} = \|id \otimes u\|_{K \otimes_{min} E \to K \otimes_{min} F}$$

(ii) u ist vollständig isometrisch $\Leftrightarrow$ $id \otimes u$ eine Isometrie ist.
(iii) u ist ein vollständiger Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $id \otimes u$ ein Isomorphismus ist.

Beweis 13
(i) Sei u vollständig beschränkt. Dann ist $id_K \otimes u$ vollständig beschränkt mit $\|id_K \otimes u\|_{cb} = \|u\|_{cb}$ aufgrund Proposition 2.6. Sei umgekehrt $id_K \otimes u$ beschränkt, dann ist

$$\|id_n \otimes u\|_{M_n \otimes_{min} E \to M_n \otimes_{min} F} \leq \|id_K \otimes u\|_{K \otimes_{min} E \to K \otimes_{min} F}$$

offensichtlich für alle n. Also u c.b.
(ii) Sei u vollständig isometrisch. Man beachte, dass es für jedes $z \in M \otimes E$ ein $N \geq 1$ gibt, sodass $z \in M_N \otimes E$. D.h. $id_K \otimes u$ ist isometrisch auf $M \otimes E$ und damit auf dem Abschluss $K \otimes_{min} E$.
(iii) Sei u ein vollständiger isomorphismus, also u invertierbar und u^{-1} ebenfalls vollständig beschränkt. Dann ist $id_K \otimes id = (id_K \otimes u)(id_K \otimes u^{-1}) = (id_K \otimes u^{-1})(id_K \otimes u)$, wobei alle hier auftretended Abbildungen beschränkt sind mit (i). Also $id_K \otimes id$ ist ein Isomorphismus.
□

In Analogie zu 3.2 schreibt Pisier die Axiome von Ruan (R_1') und (R_2') - wo α_n die einem Operatorraum E zugeordneten Matrizennormen seien - wie folgt um. Dabei sei α eine gegebene Norm auf $K \otimes E$.

AXIOM (R_1): Für alle vollständig beschränkten Abbildungen $T : K \to K$ gilt

$$\|T \otimes id\|_{K\otimes E \to K \otimes E} \leq \|T\|_{cb}$$

AXIOM (R_2): Für alle orthogonale Zerlegungen $I = P_1 + P_2$ der Idendität auf l^2 definiere (i=1,2) $T_i : K \to K : T_i(k) = P_i k P_i$. Sei $\tilde{T}_i$ gleich $T_i \otimes id : K \otimes E \to K \otimes E$. Dann gilt

$$\forall u_1, u_2 \in K \otimes E \quad \alpha(\tilde{T}_1(u_1) + \tilde{T}_2(u_2)) \leq \max\{\alpha(u_1), \alpha(u_2)\}.$$

Proposition 3.3

Ein Raum E ist genau dann ein Operatorraum mit Matrizennormen α_n, wenn $K \otimes E$ mit einer Norm α ausgestattet ist, die die AXIOME (R_1) und (R_2) erfüllt und $\alpha_n = \alpha$ für alle $n \geq 1$ auf $M_n \otimes E$.

Beweis 14

$\Rightarrow$: Sei E ein Operatorraum mit Matrizennormen α_n. Dann ist $E \subseteq B(h)$. Für die Norm α nehme man die Norm von $K \otimes_{min} E \subseteq B(l^2) \otimes_{min} B(h) \subseteq B(l^2 \otimes_2 h)$. Axiom (R_1) folgt unmittelbar aus 2.6. Jetzt zu (R_2): Ich verwende die dort eingeführten Bezeichnungen. Nun gilt für beliebige $u_1 = \sum_s k_s \otimes e_s$ und $u_2 = \sum_t k_t \otimes e_t$ aus $K \otimes E$:

$$\|\tilde{T}_1(u_1) + \tilde{T}_2(u_2)\|_\alpha = \|\sum_s P_1 k_s P_1 \otimes e_s + \sum_t P_2 k_t P_2 \otimes e_t\|_{B(l^2)\otimes_{min} B(h)}$$

$$= \|(P_1 \otimes I_h)(\sum_s k_s \otimes e_s)(P_1 \otimes I_h) + (P_2 \otimes I_h)(\sum_t k_t \otimes e_t)(P_2 \otimes I_h)\|_{B(l^2)\otimes_{min} B(h)}$$

$$= \|P_1' u_1 P_1' + P_2' u_1 P_2'\|_{B(l^2 \otimes_2 h)} \qquad \text{mit} \quad P_1' := (P_1 \otimes I_h), \quad P_2' := (P_2 \otimes I_h)$$

Man zeigt leicht, dass P_1' und P_2' eine orthogonale Zerlegung auf $B(l^2 \otimes_2 h)$ bilden. Damit ist aber für $\xi \in l^2 \otimes_2 h$

$$\|P_1' u_1 P_1'(\xi) + P_2' u_1 P_2'(\xi)\|^2_{l^2 \otimes_2 h} = \|P_1' u_1 P_1'(\xi)\|^2 + \|P_2' u_1 P_1'(\xi)\|^2 \leq \|u_1\|^2 \|P_1'\xi\|^2 + \|u_2\|^2 \|P_2'\xi\|^2$$

$$\leq max\{\|u_1\|^2, \|u_2\|^2\}(\|P_1'\xi\|^2 + \|P_2'\xi\|^2) = max\{\|u_1\|^2, \|u_2\|^2\}\|\xi\|^2_{l^2 \otimes h}$$

Damit ist Axiom (R_2) gezeigt. Wegen (9) ist klar, dass α und α_n auf den Matrizen $M_n(E)$ übereinstimmen.

$\Leftarrow$: Sei auf $K \otimes E$ eine Norm α gegeben, die die Axiome (R_1) und (R_2) erfüllt. Sei α_n die α-Norm auf $M_n(E)$. Zu zeigen ist, dass α_n die Axiome (R_1') und (R_2') erfüllt.

Beweis (R_1'): Sei $\beta \in M_n$. Sei $T : K \to K : k \mapsto \beta k$. $\|T\|_{cb} \leq 1$. Mit (R_1) ist nun für $x \in M_n \otimes E$

$$\|\beta x\|_{\alpha_n} = \|(T \otimes id)(x)\|_\alpha \leq \|x\|_{\alpha_n}$$

Beweis (R_2'): Seien $n, m \geq 1$ fest. Sei P_1 die Projektion

$$P_1 : l^2 \to l^2 : (\xi_1, \xi_2, ...) \mapsto (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...).$$

Sei $P_2 = I - P_1$. Seien $u_1 \in M_n(E)$ und $u_2 \in M_m(E) \subseteq K \otimes E$. Seien

$$S_1 : l^2 \to l^2 : (\xi_1, \xi_2, ...) \mapsto (\xi_2, \xi_3, ..., \xi_{n+m}, 0, 0, ...) \quad \text{und}$$

$$S_2 : l^2 \to l^2 : (\xi_1, \xi_2, ...) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+m}, 0, 0, ...)$$

lokale Schiebeoperatoren. $S_1, S_2 \in K$, $\|S_1\|_K, \|S_2\|_K \leq 1$. Seien

$$S : K \to K : k \mapsto S_2 k S_1 \quad \text{und} \quad \tilde{S} : K \otimes E \to^{S \otimes id} K \otimes E.$$

$\|S\|_{cb} \leq 1$. Mit (R_1) gilt $\|\tilde{S}(u_2)\|_\alpha = \|(S \otimes id)(u_2)\|_\alpha \leq \|S\|_{cb} \leq 1$. Man beachte, dass $\tilde{S}$ Matrizen um eine Spalte nach rechts und eine Zeile nach unten verschiebt. Mit letzter Abschätzung ist $\|\tilde{S}u_2\|_\alpha \leq \|u_2\|_\alpha$. Analog ist der Übergang $\tilde{S}u_2 \mapsto u_2$ eine Kontraktion, sodass

$$\|\tilde{S}u_2\|_\alpha = \|u_2\|_\alpha. \tag{10}$$

Seien nun $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ wie in (R_2), i.e. $\tilde{T}_1 : K \otimes E \to K \otimes E : k \otimes e \to k \otimes P_1 e P_1$. Es ist $\tilde{T}_1(u_1) = u_1$. Es gilt nun mit (R_2):

$$\|\tilde{T}_1 u_1 + \tilde{T}_2 \tilde{S}^n u_2\|_\alpha = \|u_1 + \tilde{S}^n u_2\|_\alpha \leq \max\{\|u_1\|_\alpha, \|\tilde{S}^n u_2\|_\alpha\} = \max\{\|u_1\|_\alpha, \|u_2\|_\alpha\}$$

Und das ist letztendlich schon die Behauptung (R_2') mit "$\leq$" statt "$=$". Mit (R_1') ergibt sich jetzt für $z :=$ die Einheitsmatrix in M_n:

$$\|u_1\|_{\alpha_n} = \left\| \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\alpha_{n+m}} \leq \left\| \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \right\|_{\alpha_{n+m}}$$

und analog für u_2 mit (10). □

Fazit:

Man kann nun eine Operatorraumstruktur auf E über einen Satz von Matrizennormen erklären, die die Axiome (R_1') und (R_2') erfüllen, oder die Operatorraumstruktur mit einer Norm α auf $K \otimes E$ erklären, die die Axiome (R_1) und (R_2) erfüllt. Eine Abbildung $u : E \to F$ ist vollständig beschränkt genau dann, wenn $id \otimes u : K \otimes_{min} E \to K \otimes_{min} F$ beschränkt ist (s. 3.3).

Des weiteren stimmt die Matrizennorm α_n auf $M_n \otimes E$ mit der Norm des minimalen Tensorproduktes $M_n \otimes_{min} E$ überein. Als Norm α auf $K \otimes E$ kann man die Norm des minimalen Tensorproduktes $K \otimes_{min} E$ wählen und α erfüllt dann die Axiome (R_1) und (R_2).

Die K-Version scheint eleganter, doch ist die Matrizenversion oft doch einfacher. K krankt ein wenig daran, dass K im Gegensatz zu M_n nicht endlichdimensional ist. Anderenseits hat die K-Version den Vorteil, dass man zur Messung der vollständigen Beschränktheitsnorm nur *eine* Abbildung $id_K \otimes u$ heranziehen muss.

4 Der Dualraum

Sei E ein Operatorraum. Dann ist vermöge des Satzes von Ruan der Dualraum E^* ein Operatorraum, indem man $K \otimes E^*$ durch eine geeignete Einbettung mit der Norm von $cb(E,K)$ ausstattet, wie wir sehen werden. Es liegt nämlich $K \otimes E^*$ (injektiv) in $cb(E,K)$:

$$\Phi : K \otimes E^* \to cb(E,K) : \ \Phi(k \otimes e^*)(e) := k \otimes e^*(e) \quad \in K \otimes C = K$$

Man erzeuge eine Norm auf $K \otimes E^*$, indem man über Φ die Norm von $cb(E,K)$ nimmt. E^* wird damit zu einem Operatorraum, den Beweis geben wir unten.

Man beachte, dass für den Dualraum von Banachräumen gilt: $E^* = cb(E,\mathcal{C})$. Es stimmt damit unsere Operatorraumnorm auf E^* mit der gewöhnlichen Norm auf E^* überein: Sei nämlich $e^* \in E^* \subseteq C \otimes E^* \subseteq K \otimes E^*$. Dann ist $\|\Phi(1_C \otimes e^*)\|_{cb(E,K)} = \|e \mapsto e^*(e)\|_{cb(E,K)} = \|e^*\|_{cb(E,C)} = \|e^*\|_{E^*}$.

Man kann Φ verallgemeinern und für Operatorräume E, F den Banachraum $cb(E,F)$ zu einem Operatorraum machen:

$$\Phi : K \otimes cb(E,F) \to cb(E, K \otimes_{min} F) : \ \Phi(k \otimes u)(e) := k \otimes u(e) \quad \in K \otimes_{min} F \tag{11}$$

Φ ist injektiv und ein Elementartensor $k \otimes u \in K \otimes cb(E,F)$ - durch Φ aufgefasst als Abbildung $E \to K \otimes_{min} F$ - ist tatsächlich vollständig beschränkt, d.h. das Bild von Φ liegt wirklich in $cb(E, K \otimes_{min} F)$:
Zum Beweis verwende ich hier die Einsteinsche Summenkonvention und überprüfe 3.2.(i).
Hier sind $k, k_s \in K$, $e_s \in E$, $u \in cb(E,F)$. Also sei $k \otimes u : E \to K \otimes_{min} F$.
$\|id_K \otimes (k \otimes u)\ (k_s \otimes e_s)\|_{K \otimes_{min} K \otimes_{min} F} = \|k_s \otimes k \otimes u(e_s)\|_{K \otimes_{min} K \otimes_{min} F}$
$= \|(id \otimes id \otimes u)(k_s \otimes k \otimes e_s)\|_{K \otimes_{min} K \otimes_{min} F}$
$\leq \|u\|_{cb(E,F)} \|k_s \otimes k \otimes e_s\|_{K \otimes_{min} K \otimes_{min} E} = \|u\|_{cb(E,F)} \|k\|_K \|k_s \otimes e_s\|_{K \otimes_{min} E}$
Also ist $k \otimes u$ vollständig beschränkt.

Proposition 4.1
Seien E, F Operatorräume. Dann bette man wie in (11) ein

$$K \otimes cb(E,F) \subseteq cb(E, K \otimes_{min} F).$$

Die Norm auf $K \otimes cb(E,F)$ erfüllt dann die Axiome von Ruan, sodass $cb(E,F)$ ein Operatorraum ist.

Beweis 15
Ich verwende hier die Einsteinsche Summenkonvention, so wie schon beschrieben. Ich überprüfe die Axiome (R_1) und (R_2) und verwende die dort eingeführten Bezeichnungen. Die α-Norm ist in unserem Fall nun $\|.\|_{cb(E, K \otimes_{min} F)}$. Seien $k_i \in K$, $u_i \in cb(E,F)$ und $e \in E$. Zum Messen der cb-Norm verwende ich hier mehrmals 3.2.(i).

$(R_1):\quad \|(T\otimes id)(k_i\otimes u_i)\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)} = \|T(k_i)\otimes u_i\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)}$
$= \|e\mapsto k_i\otimes u_i(e) \mapsto^{T\otimes id} T(k_i)\otimes u_i(e)\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)}$
$\leq \|e\mapsto k_i\otimes u_i(e)\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)}\|T\otimes id\|_{cb(K\otimes_{min}F)} = \|k_i\otimes e_i\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)}\|T\|_{cb}$

$(R_2):\quad \|\tilde{T}_1(k_i\otimes u_i)+\tilde{T}_2(k_s\otimes u_s)\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)} = \|T_1(k_i)\otimes u_i + T_2(k_s)\otimes u_s\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)}$
$= \|e\mapsto T_1(k_i)\otimes u_i(e) + T_2(k_s)\otimes u_s(e)\|_{cb(E,K\otimes_{min}F)}$
$= \|k_v\otimes e_v \mapsto k_v\otimes T_1(k_i)\otimes u_i(e_v) + k_v\otimes T_2(k_s)\otimes u_s(e_v)\|_{K\otimes_{min}E\to K\otimes_{min}K\otimes_{min}F}$
$= \sup_{\|k_v\otimes e_v\|_{K\otimes_{min}E}\leq 1}\|T_1(k_i)\otimes k_v\otimes u_i(e_v)+T_2(k_s)\otimes k_v\otimes u_s(e_v)\|_{K\otimes_{min}K\otimes_{min}F}$
$= \sup_{\|k_v\otimes e_v\|\leq 1}\|\hat{T}_1(k_i\otimes k_v\otimes u_i(e_v))+\hat{T}_2(k_s\otimes k_v\otimes u_s(e_v))\|_{K\otimes_{min}K\otimes_{min}F},$
wobei in der letzten Zeile $\hat{T}_j := T_j\otimes id_{K\otimes_{min}F}$ sei.
Man kann nun AXIOM (R_2) für den Operatorraum $K\otimes_{min}F$ anwenden
und erhält weiter
$\leq \sup_{\|k_v\otimes e_v\|\leq 1}\max(\|k_i\otimes k_v\otimes u_i(e_v)\|_{K\otimes_{min}K\otimes_{min}F},$
$\|k_s\otimes k_v\otimes u_s(e_v)\|_{K\otimes_{min}K\otimes_{min}F})$
$= \sup_{\|k_v\otimes e_v\|\leq 1}\max(\|k_v\otimes(k_i\otimes u_i)(e_v)\|_{K\otimes_{min}K\otimes_{min}F},$
$\|k_v\otimes(k_s\otimes u_s)(e_v)\|_{K\otimes_{min}K\otimes_{min}F})$
vertauschen von sup und max liefert weiter
$= \max(\|k_i\otimes u_i\|_{cb(E,K\otimes F)}, \|k_s\otimes u_s\|_{cb(E,K\otimes F)})$

□

Man beachte, dass die Matrizenräume M_n Operatorteilräume von K sind (siehe Kapitel "Die Axiome von Ruan") und damit wegen der vollständigen isometrischen Einbettung in 4.1 vollst. isometrisch gilt:

$$M_n\otimes_{min} cb(E,F) = cb(E, M_n\otimes_{min} F)\,.$$

Die Gleichheit ergibt sich aus der Endlichdimensionalität von M_n. Insbesondere gilt also

$$M_n\otimes_{min} E^* = cb(E,M_n)\,.$$

Lemma 4.2
(i) [ER, Lemma 2.1] Seien E ein Operatorraum und $x\in M_n(E)$. Dann ist

$$\|x\|_{M_n(E)} = \sup_{\|u\|_{cb(E,M_n)}\leq 1}\|(id_n\otimes u)(x)\|_{M_n(M_n)}\,. \tag{12}$$

(ii) Seien E, F Operatorräume. Sei $x\in E\otimes_{min} F$. Dann ist

$$\|x\|_{E\otimes_{min}F} = \sup_{\|u\|_{cb(F,K)}\leq 1}\|(id_E\otimes u)(x)\|_{E\otimes_{min}K}$$
$$= \sup_{n\geq 1}\sup_{\|u\|_{cb(F,M_n)}\leq 1}\|(id_E\otimes u)(x)\|_{E\otimes_{min}M_n}$$

(iii) Seien E, F, G Operatorräume. Sei $x \in G \otimes_{min} cb(E,F)$. Für $v \in cb(F,K)$ sei $T(v) : cb(E,F) \to cb(E,K) : T(v)(u) := v \circ u$. Dann gilt

$$\|x\|_{G\otimes_{min}cb(E,F)} = \sup_{\|v\|_{cb(F,K)}\leq 1} \|(id_G \otimes T(v))(x)\|_{G\otimes_{min}cb(E,K)}$$

$$= \sup_{n\geq 1} \sup_{\|v\|_{cb(F,M_n)}\leq 1} \|(id_G \otimes T(v))(x)\|_{G\otimes_{min}cb(E,M_n)}$$

Beweis 16

(i) Sei $E \subseteq B(h)$, also $M_n(E) \subseteq B(h^n)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Einheitsvektoren $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n) \in h^n$, sodass $| < x\,\xi, \eta > | \geq \|x\| - \varepsilon$. Seien $h_1 := lin\{\xi_1, ..., \xi_n\} \subseteq h$, $h_2 := lin\{\eta_1, ..., \eta_n\} \subseteq h$. Seien o.B.d.A. h_1 und h_2 n-dimensional. Sonst nimm irgendwelche Vektoren zu h_1, h_2 hinzu. Seien $W_k : C^n \to h_k$ Isometrien $(k = 1, 2)$. Dann definiere

$$u : E \to M_n = B(C^n) : \; u(e) = W_2^{-1} e W_1 \,.$$

Da $\oplus_{i=1}^n W_k : (C^n)^n \to (h_k)^n$ Isometrien sind, folgt nun

$$\|u_n(x)\|_{M_n(M_n)} \geq \left| < u_n(x) \begin{pmatrix} W_1^{-1} \\ .. \\ W_1^{-1} \end{pmatrix} \xi, \begin{pmatrix} W_2^{-1} \\ .. \\ W_2^{-1} \end{pmatrix} \eta > \right|$$

$$= \left| < \begin{pmatrix} W_2 \\ .. \\ W_2 \end{pmatrix} [u(x_{ij})]_{ij} \begin{pmatrix} W_1^{-1} \\ .. \\ W_1^{-1} \end{pmatrix} \xi, \eta > \right| = | < [W_2 u(x_{ij}) W_1^{-1}]_{ij}\, \xi, \eta > |$$

$$= | < x\,\xi, \eta > | \geq \|x\| - \varepsilon$$

Da ε beliebig war, gilt $\leq$ in (12). Die Ungleichung $\geq$ ist trivial.

(ii) Sei $x = \sum_i e_i \otimes f_i$ aus dem algebraischen Tensorprodukt $E \otimes F$. Seien $E_0 := lin\{e_i\} \subseteq E$. Es genügt die Norm $\|x\|_{E_0\otimes_{min}F}$ zu errechnen. Da E_0 endlichdimensional ist, ist $E_0 \subseteq B(l^2)$. Sei $P_N \in B(l^2)$ die übliche Projektion (siehe Notationen). Es folgt nun mit 3.1

$$\|x\|_{E_0\otimes_{min}F} = \sup_{N\geq 1} \|\sum_i P_N e_i P_N \otimes f_i\|_{M_N\otimes F}$$

Wendet man nun (i) an, so ist das weiter gleich

$$= \sup_N \sup_{\|u\|_{cb(F,K)}\leq 1} \|\sum_i P_N e_i P_N \otimes u(f_i)\|_{M_N\otimes K} = \sup_{\|u\|_{cb(F,K)}\leq 1} \|\sum_i e_i \otimes u(f_i)\|_{E_0\otimes_{min}K}$$

$$= \sup_{\|u\|_{cb(F,K)}\leq 1} \|(id_E \otimes u)(x)\|_{E\otimes_{min}K} \;\; =: g(x)\,,$$

also die Behauptung. Sei nun $x \in E \otimes_{min} F$ und $\tilde{x} \in E \otimes F$ ein nahes Element, also etwa $\|x - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$. Dann ist offensichtlich

$$g(x) = g((x - \tilde{x}) + \tilde{x}) \leq g(x - \tilde{x}) + g(\tilde{x}) \leq \|x - \tilde{x}\| + g(\tilde{x}) \leq \varepsilon + g(\tilde{x})$$

und analog $g(\tilde{x}) \leq \varepsilon + g(x)$. Also ist $\|x\| \approx \|\tilde{x}\| = g(\tilde{x}) \approx g(x)$. Da ε beliebig war, folgt die Behauptung auch für dieses x.

(iii) Ich zeige zuerst den Spezialfall $G := M_N$. Ich verwende die Einsteinsche Summenkonvention. Sei $x_i \otimes u_i \in M_N \otimes cb(E,F)$. Dann ist

$$\sup_{\|v\|_{cb(F,K)}\leq 1} \|x_i \otimes v \circ u_i\|_{M_N \otimes cb(E,K)} = \sup_{\|v\|_{cb(F,K)}\leq 1} \|e \mapsto x_i \otimes v(u_i(e))\|_{cb(E, M_N \otimes K)}$$

$$= \sup_{\|v\|_{cb(F,K)}\leq 1} \sup_{\|y_s \otimes e_s\|_{K\otimes E}\leq 1} \|y_s \otimes x_i \otimes v(u_i(e_s))\|_{K \otimes M_N \otimes K}$$

$$= \sup_{\|y_s \otimes e_s\|_{K\otimes E}\leq 1} \|y_s \otimes x_i \otimes u_i(e_s)\|_{K \otimes M_N \otimes F}$$

Letztere Gleichheit gilt wegen (ii). Und das ist weiter gleich

$$= \|e \mapsto x_i \otimes u_i(e)\|_{cb(E, M_N \otimes F)} = \|x_i \otimes u_i\|_{M_N \otimes cb(E,F)}$$

Sei nun G beliebig ist. Dann führe man den Beweis genauso wie den Beweis von (ii). Denn (ii) ist ja eine Verallgemeinerung von (i). Ähnlich wie im Beweis von (ii) benutze man 3.1 um den Spezialfall $G = M_N$ auf beliebige G auszudehnen. Es treten dabei verglichen mit dem Beweis (ii) keine wesentlichen Änderungen auf. □

Die folgende Proposition beruht auf 4.2.(i). Sie ist [ER, Theorem 2.2] zuzuschreiben.

Proposition 4.3 (ER, Theorem 2.2)
Sei E ein Operatorraum. Dann ist $E \subseteq E^{**}$ vollständig isometrisch.

Beweis 17
Sei E in E^{**} wie üblich eingebettet: $e(e^*) := e^*(e)$. Ich verwende die Einsteinsche Summenkonvention. Sei $x_i \otimes e_i \in M_n \otimes E$. Dann ist

$$\|x_i \otimes e_i\|_{M_n \otimes E^{**}} = \|e^* \mapsto x_i\, e^*(e_i)\|_{cb(E^*, M_n)} = \sup_N \sup_{\|y_s \otimes e_s^*\|_{M_N \otimes E^*}\leq 1} \|y_s \otimes x_i\, e_s^*(e_i)\|_{M_N \otimes M_n}$$

$$= \sup_N \sup_{\|u\|_{cb(E,M_N)}\leq 1} \|x_i \otimes u(e_i)\|_{M_n \otimes M_N} = \sup_N \|x_i \otimes e_i\|_{M_n \otimes E}$$

Letzte Gleichheit gilt wegen 4.2.(i). □

Proposition 4.4
Seien E, F Operatorräume. Dann gelten
(i) Sei $u : E \to F$ linear. Dann ist u c.b. $\Leftrightarrow$ u^* c.b. und es gilt $\|u\|_{cb(E,F)} = \|u^*\|_{cb(F^*,E^*)}$
(ii) Dann ist $cb(E,F) \subseteq cb(F^*, E^*)$ vollständig isometrisch.

Beweis 18
(i) Sei u vollständig beschränkt. $u^*(f^*) = f^* \circ u$. Dann ist (Einsteinsche Summenkonvention!)

$$\|u^*\|_{cb} = \sup_{\|x_i \otimes f_i^*\|_{K\otimes F^*}\leq 1} \|x_i \otimes f_i^* \circ u\|_{K \otimes E^*} = \sup_{\|x_i \otimes f_i^*\|_{K\otimes F^*}\leq 1} \|e \mapsto x_i\, f_i^*(u(e))\|_{cb(E,K)} \quad (13)$$

$$\leq \sup_{\|v\|_{cb(F,K)}\leq 1} \|e \mapsto v(u(e))\|_{cb(E,K)} \leq \|u\|_{cb(E,F)} \tag{14}$$

Wenn umgekehrt u^* c.b. ist, dann ist nun also auch u^{**} c.b. Da u die Einschränkung von u^{**} auf $E \subseteq E^{**}$ ist, ist also $\|u\|_{cb} \leq \|u^{**}\|_{cb} \leq \|u^*\|_{cb}$.

(ii) Sei $x_i \otimes u_i \in M_n \otimes cb(E,F)$. Dann nimmt $x_i \otimes u_i^* \in M_n \otimes cb(F^*, E^*)$ den Wert an:

$$\|x_i \otimes u_i^*\|_{cb(F^*, M_n \otimes E^*)} = \|f^* \mapsto x_i \otimes f^* \circ u_i\|_{cb(F^*, M_n \otimes E^*)}$$

$$= \sup_N \sup_{\|y_s \otimes f_s^*\|\leq 1} \|y_s \otimes x_i \otimes f_s^* \circ u_i\|_{M_N \otimes M_n \otimes E^*}$$

$$= \sup_N \sup_{\|y_s \otimes f_s^*\|\leq 1} \|x_i \otimes (e \mapsto y_s \otimes f_s^*(u_i(e))\|_{M_n \otimes cb(E, M_N)}$$

$$= \sup_N \sup_{\|v\|_{cb(F,M_N)}\leq 1} \|x_i \otimes v \circ u_i\|_{M_N \otimes cb(E,M_N)} = \|x_i \otimes u_i\|_{cb(E,F)}$$

Für die letzte Gleichheit wurde 4.2.(iii) verwendet. □

Proposition 4.5

Seien E, F, G Operatorräume. Dann gilt vollständig isometrisch

$$G \otimes_{min} cb(E,F) \subseteq cb(E, G \otimes_{min} F)$$

Ist G endlichdimensional, so tritt hier sogar Gleichheit ein.
Insbesondere ist $G \otimes_{min} E^* \subseteq cb(E,G)$ mit Gleichheit, wenn G endlichdimensional.

Beweis 19

Ich verwende die Einsteinsche Summenkonvention. Sei $g_i \otimes u_i \in G \otimes cb(E,F)$. Sei G_0 der endlichdimensionale Operatorraum $G_0 := lin\{g_i\} \subseteq G$. Wegen 3.1.(ii) gilt:

$$\|g_i \otimes u_i\|_{G_0 \otimes_{min} cb(E,F)} = \sup_n \|P_n g_i P_n \otimes u_i\|_{M_n \otimes cb(E,F)} = \sup_n \|e \mapsto P_n g_i P_n \otimes u_i(e)\|_{cb(E, M_n \otimes F)}$$

$$= \sup_n \sup_{\|x_s \otimes e_s\|_{K \otimes F}\leq 1} \|x_s \otimes P_n g_i P_n \otimes u_i(e_s)\|_{K \otimes_{min} M_n \otimes_{min} F}$$

$$= \sup_{\|x_s \otimes e_s\|_{K \otimes F}\leq 1} \|x_s \otimes g_i \otimes u_i(e_s)\|_{K \otimes_{min} G \otimes_{min} F} = \|e \mapsto g_i \otimes u_i(e)\|_{cb(E, G \otimes_{min} F)} .$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Einbettung schon surjektiv ist für G endlichdimensional. □

Lemma 4.6

(i) Seien E, F, G Operatorräume, wobei F, G endlichdimensional seien. Sei $u \in cb(E,F) = E^* \otimes_{min} F$ und $z \in G \otimes_{min} E \subseteq G \otimes_{min} E^{**} = cb(E^*, G)$. Dann gilt folgende Gleichung in $G \otimes_{min} F$:

$$(id_G \otimes u)(z) = (z \otimes id_F)(u) ,$$

wobei man links u und z als Elemente $u \in cb(E,F)$, $z \in G \otimes_{min} E$ auffasst und rechts sie als Elemente $u \in E^* \otimes_{min} F$, $z \in cb(E^*, G)$ interpretiert.

(ii) Sei E ein Operatorraum und $u : E \to M_n$ linear. Dann ist

$$\|u\|_{cb} = \|u\|_n := \|id_n \otimes u : M_n \otimes E \to M_n \otimes M_n\| . \tag{15}$$

(iii) Sei $u : E \to F$ beschränkt linear, wo E, F beliebige Operatorräume sind. Dann gilt:

$$\|u\|_n = \|u^*\|_n \,. \tag{16}$$

(iv) Sei $u : E \to F$ beschränkt linear, dann gilt:

$$\|u\|_n = \sup \left\{ \|wuv\|_{cb(M_n^*, M_n)} \,\middle|\, \|v\|_{cb(M_n^*, E)} \le 1, \, \|w\|_{cb(F, M_n)} \le 1 \right\}, \tag{17}$$

Beweis 20

(i) Ich verwende hier wieder die Einsteinsche Summenkonvention. $u \in cb(E, F)$ habe in $E^* \otimes F$ die Form $u = e_i^* \otimes f_i$, also $u(e) = e_i^*(e)\, f_i$. $z = g_s \otimes e_s \in G \otimes_{min} E$ habe in $G \otimes_{min} E^{**}$ die Form $z = g_s \otimes e_s^{**}$ und diese schreibe um zu einem Element $v \in cb(E^*, G)$, also $v(e^*) = g_s\, e_s^{**}(e^*) = g_s\, e^*(e_s)$. Damit ergibt sich die Rechnung

$$(id_G \otimes u)(z) = g_s \otimes u(e_s) = g_s \otimes e_i^*(e_s)\, f_i = e_i^*(e_s)\, g_s \otimes f_i = v(e_i^*) \otimes f_i$$

$$= (v \otimes id_F)(e_i^* \otimes f_i) = (z \otimes id_F)(u) \,.$$

(ii) Nehmen wir zuerst an, E ist reflexiv. Wenn man nun das E in (i) gleich diesem reflexiven E setzt, dann gilt aber für jedes z wie (i): $z \in G \otimes_{min} E = cb(E^*, G)$, da wegen der Reflexivität von E die Inklusion zur Gleichheit wird. Setze nun in (i) weiters $F = G := M_n$. Dann gilt mit 4.2.(i) und der Behauptung (i):

$$\|u\|_{cb(E, M_n)} = \|u\|_{E^* \otimes M_n} = \sup_{\|v\|_{cb(E^*, M_n)} \le 1} \|(v \otimes id_n)(u)\|_{M_n \otimes M_n}$$

$$= \sup_{\|v\|_{M_n \otimes E} \le 1} \|(id_n \otimes u)(v)\|_{M_n \otimes M_n} = \|u\|_n \,,$$

also die Behauptung. Sei nun E ein beliebiger Operatorraum. Wir beachten, dass trivialerweise $\|u\|_{cb} = \sup_{E_0 \subseteq E} \|u|_{E_0}\|_{cb}$ gilt, wo das Supremum über alle endlichdim. Operatorräume $E_0 \subseteq E$ genommen wird. Damit erhalten wir mit dem schon erhaltenen Resultat

$$\|u\|_{cb} = \sup_{E_0 \subseteq E} \|u|_{E_0}\|_{cb} = \sup_{E_0 \subseteq E} \|u|_{E_0}\|_n = \|u\|_n \,.$$

(iii) Man führe zuerst folgende Rechnung durch, die völlig analog zu (13), (14) ist: Für beliebige u gilt

$$\|u^*\|_n = \sup_{\|x_i \otimes f_i^*\|_{M_n \otimes F^*} \le 1} \|x_i \otimes f_i^* \circ u\|_{M_n \otimes E^*} = \sup_{\|x_i \otimes f_i^*\|_{M_n \otimes F^*} \le 1} \|e \mapsto x_i\, f_i^*(u(e))\|_{cb(E, M_n)}$$

$$= \sup_{\|v\|_{cb(F, M_n)} \le 1} \|v \circ u\|_{cb(E, M_n)} \,.$$

Nennen wird diese Rechung (I). Man kann den Ausdruck wegen (ii) nun weiter abschätzen zu

$$= \sup_{\|v\|_{cb(F, M_n)} \le 1} \|v \circ u\|_n \le \|u\|_n \,,$$

und damit ist $\|u\|_n \le \|u^{**}\|_n \le \|u^*\|_n \le \|u\|_n$.

(iv) Nehmen wir zuerst an, E und F sind reflexiv. Nun ergibt sich wegen (I) angewendet auf u^*:

$$\|u\|_n \le \|u^{**}\|_n = \sup_{\|v\|_{cb(E^*,M_n)}\le 1} \|v \circ u^*\|_{cb(E,M_n)} = \sup_{\|v\|_{cb(E^*,M_n)}\le 1} \|(u^{**} \circ v^*)^*\|_{cb(E^{**},M_n^{**})}\,.$$

(Letzte Gleichheit wegen 4.4.(i).) Da $M_n^{**} = M_n$ können wir (ii) anwenden. Und danach wird wieder (I) angewendet:

$$= \sup_{\|v\|_{cb(E^*,M_n)}\le 1} \|(u^{**} \circ v^*)^*\|_n = \sup_{\|v\|_{cb(E^*,M_n)}\le 1} \sup_{\|w\|_{cb(F^{**},M_n)}\le 1} \|w \circ u^{**} \circ v^*\|_{cb(M_n^*,M_n)}$$

Wegen 4.4.(i) erhält man weiter

$$\le \sup_{\|v\|_{cb(M_n^*,E^{**})}\le 1} \sup_{\|w\|_{cb(F^{**},M_n)}\le 1} \|w \circ u^{**} \circ v\|_{cb(M_n^*,M_n)}$$

Wegen der Reflexivität von E und F ist $E = E^{**}$ und $F = F^{**}$ und $u = u^{**}$ und man kann transformieren zu

$$= \sup_{\|v\|_{cb(M_n^*,E)}\le 1} \sup_{\|w\|_{cb(F,M_n)}\le 1} \|w \circ u \circ v\|_{cb(M_n^*,M_n)} \le \|u\|_n$$

Letzte Ungleichung wieder wegen (ii). Das Resultat ist erhalten.
Seien nun E und F beliebig. Einerseits gilt mit (ii) offensichtlich (17), wenn man das Gleichheitszeichen durch $\ge$ ersetzt. Es bleibt die Ungleichung $\le$ zu zeigen. Sei dazu $E_0 \subseteq E$ endlichdimensional mit $\|u\|_n \approx \|u|_{E_0}\|_n$. Sei $F_0 \subseteq F$ der endlichdim. Operatorraum $F_0 := u(E_0)$. Mit dem schon erhaltenen Resultat für reflexive Operatorräume finden wir v und w mit $\|v\|_{cb(M_n^*,E_0)} \le 1$ und $\|w\|_{cb(F_0,M_n)} \le 1$, sodass $\|u|_{E_0}\|_n \approx \|w\,u\,v\|_{cb(M_n^*,M_n)}$. Einerseits ist v auch eine Abbildung $v : M_n^* \to E$ mit $\|v\|_{cb} \le 1$ und anderenseits können wir wegen 1.4 w zu einer Abbildung $\tilde{w} : F \to M_n$ mit $\|\tilde{w}\|_{cb} \le 1$ ausdehnen. Da dabei $w\,u\,v = \tilde{w}\,u\,v$ gilt, erhalten wir $\|u\|_n \approx \|\tilde{w}\,u\,v\|_{cb(M_n^*,M_n)}$. □

Lemma 4.7

(i) Seien E,F Operatorräume. Dann gibt es eine kontraktive, lineare Injektion

$$(E \otimes_{min} F)^* \to cb(E, F^*)$$

$\tilde{u} \mapsto u$ vermöge $u(e)(f) := \tilde{u}(e \otimes f)$, wo $e \in E, f \in F$.
(ii) Ist F oder E endlichdimensional, so gilt $(E \otimes_{min} F)^* \approx cb(E, F^*)$ isomorph als Banachräume, und insbesondere gilt dann $(E \otimes_{min} F)^* \approx E^* \otimes_{min} F^*$.

Beweis 21

Ich verwende hier wieder die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. ich schreibe die Summenzeichen nicht an. Sei $\tilde{u} \in (E \otimes_{min} F)^*$. Dann erechnet sich die Norm von u in $cb(E, F^*)$ durch

$$\|u\|_{cb(E,F^*)} = \|id \otimes u\|_{K\otimes E \to K \otimes F^*} = \sup_{\|x_k \otimes e_k\|_{K\otimes E}\le 1} \|x_k \otimes u(e_k)\|_{K\otimes F^*}$$

$$= \sup_{\|x_k \otimes e_k\|_{K\otimes E}\leq 1} \|f \mapsto x_k\, u(e_k)(f)\|_{cb(F,K)}$$

$$= \sup_{\|x_k \otimes e_k\|_{K\otimes E}\leq 1} \sup_{\|y_i \otimes f_i\|_{K\otimes F}\leq 1} \|y_i \otimes x_k\, u(e_k)(f_i)\|_{K\otimes K}$$

$$\leq \sup_{\|x_k \otimes y_k \otimes e_k \otimes f_k\|_{K\otimes K\otimes E\otimes F}\leq 1} \|x_k \otimes y_k\, u(e_k)(f_k)\|_{K\otimes K}$$

$$= \|id \otimes id \otimes \tilde{u} : K \otimes_{min} K \otimes_{min} E \otimes_{min} F \to K \otimes_{min} K \otimes C\|$$

$$= \|id \otimes \tilde{u} : K \otimes_{min} E \otimes_{min} F \to K \otimes C\|_{cb} = \|\tilde{u}\|_{cb} = \|\tilde{u}\|_{(E\otimes_{min}F)^*} .$$

Also ist die betrachtete Abbildung eine Kontraktion. Die Injektivität ist offensichtlich.

(ii) Ich zeige die Surjektivität und verwende hier nicht mehr die Einsteinsche Summenkonvention. Sei etwa $dim(F) = n$, also etwa $F = lin\{f_1, ..., f_n\}$. Dann gibt es wegen 2.8.(i) eine feste Konstante $M > 0$, sodass für beliebige $u \in cb(E, F^*)$ gilt, für die zugeordnete Abbildung $\tilde{u}$ gilt:

$$\|\tilde{u}\|_{(E\otimes_{min}F)^*} = \sup_{\|\sum_{i=1}^n e_i\otimes f_i\|_{E\otimes F}\leq 1} \left|\sum_{i=1}^n u(e_i)(f_i)\right|$$

$$\leq \sup_{\|\sum_i e_i\otimes f_i\|_{E\otimes F}\leq 1} n\,\|u\|_{cb(E,F^*)} \max_i \|e_i\|\,\|f_i\|$$

$$\leq \sup_{\|\sum_i e_i\otimes f_i\|_{E\otimes F}\leq 1} n\,\|u\|_{cb(E,F^*)}\, M \left\|\sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i\right\| = n\,\|u\|_{cb(E,F^*)}\, M .$$

Also liegt $\tilde{u}$ tatsächlich in $(E \otimes F)^*$ und u ist das Bild von $\tilde{u}$. $\square$

Definition 4.8

Sei J_n definiert durch

$$J_n : M_n \to M_n^* : \quad J_n(x)(y) := \frac{1}{n} tr(y^t x) \qquad x, y \in M_N$$

Seien E,F Operatorräume und $u : E \to F^*$ linear. Dann heißt u spurbeschränkt, wenn

$$\|u\|_{tb} := \sup_{n\geq 1} \|J_n \otimes u : M_n \otimes E \to M_n^* \otimes F^*\|_{M_n(E)\to M_n(F)^*} < \infty \tag{18}$$

D.h., der Wertebereich $M_n^* \otimes F^*$ von $J_n \otimes u$ werde gemäß 4.7.(ii) in $M_n(F)^*$ eingebettet und diese Norm dann verwendet.

Man beachte, dass die Einbettung $M_n^* \otimes F^* \to (M_n \otimes F)^*$ von folgender Gestalt ist (siehe 4.7.(i) und (ii)).

$$(x^* \otimes f^*)(x \otimes f) = x^*(x) f^*(f) \qquad x^* \otimes f^* \in M_n^* \otimes F^*,\ x \otimes f \in M_n \otimes F .$$

Mehr konkret nimmt damit $J_n \otimes u$ die Form $(x \otimes e \in M_n \otimes E, y \otimes f \in M_n \otimes F)$

$$(J_n \otimes u)(x \otimes e)(y \otimes f) = [J_n(x) \otimes u(e)](y \otimes f) = J_n(x)(y)\, u(e)(f) \tag{19}$$

an, und damit folgt durch eine einfache Rechnung, dass in Matrizenschreibweise, also für $(e_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(E), (f_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(F)$, gilt:

$$(J_n \otimes u)((e_{ij})),((f_{ij})) = \frac{1}{n} \sum_{1\leq i,j\leq n} u(e_{ij})(f_{ij})\,,$$

Bemerkung: Es ist sehr wichtig, folgendes festzuhalten:
Seien X, Y Banachräume. Seien $B(X, Y^*)$ die linearen Abbildung $X \to Y^*$ und $Bil(X \times Y, \mathcal{C})$ die bilinearen Abbildungen $X \times Y \to \mathcal{C}$. Dann sind beide Räume isometrisch isomorph, also $B(X, Y^*) = Bil(X \times Y, \mathcal{C})$. D.h. für $f : X \to Y^*$ beschränkt sei $\tilde{f} : X \times Y \to \mathcal{C}$ die entsprechende Bilinearform, dann ist

$$\|f\|_{B(X,Y^*)} = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \sup_{\|y\|_Y\leq 1} |\tilde{f}(x,y)|\,.$$

Damit ergibt sich für $\|u\|_{tb}$ aus (18)

$$\|u\|_{tb} = \sup_{n\geq 1} \sup_{\|e\|_{M_n(E)}\leq 1} \sup_{\|f\|_{M_n(E)}\leq 1} |(J_n \otimes u)(e)(f)|\,.$$

Lemma 4.9 (JP, Lemma 1.2)
Seien E, F Operatorräume und $u : E \to F^*$ linear. Dann gilt
u ist vollständig beschränkt $\Rightarrow$ u ist spurbeschränkt $\Rightarrow$ u ist beschränkt.
Und es gilt $\|u\| \leq \|u\|_{tb} \leq \|u\|_{cb}$.

Beweis 22
Sei u vollständig beschränkt. Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention. Seien x_{ij} die kanonischen Basiselemente von M_n. Es ergibt sich folgende Rechnung:

$$\sup_{\|x_{ij}\otimes e_{ij}\|_{M_n\otimes E}\leq 1} \|(id_n \otimes u)(x_{ij} \otimes e_{ij})\|_{M_n\otimes F^*} = \sup_{\|x_i\otimes e_i\|} \|f \mapsto x_{ij} \otimes u(e_{ij})(f)\|_{cb(F,M_n)}$$

$$= \sup_{\|x_{ij}\otimes e_{ij}\|} \sup_{\|x_{st}\otimes f_{st}\|_{M_n\otimes F}\leq 1} \|x_{st} \otimes x_{ij} \otimes u(e_{ij})(f_{st})\|_{M_n\otimes M_n}\,. \tag{20}$$

In (20) wird die Norm der $n^2 \times n^2$-Matrix $T := [u(e_{ij})(f_{st})]_{is,jt}$ genommen, wobei das Tupel (i, s) die y-Komponente, und das Tupel (j, t) die x-Komponente indiziert. Nach der Formel

$$\|T\|_{M_{n^2}} = \sup_{\sum_{jt}|\alpha_{jt}|^2=1} \sup_{\sum_{is}|\beta_{is}|^2=1} |< T\,\alpha, \beta >| \quad (\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{n^2}) \tag{21}$$

kann man die Norm, die in (20) auftritt, nach unten wie folgt abschätzen: setze speziell in (21) $\alpha, \beta := n^{1/2} 1_{M_n}$. Damit wird (20) größer gleich

$$\geq \sup_{\|x_{ij}\otimes e_{ij}\|} \sup_{\|x_{st}\otimes f_{st}\|} \Big|\frac{1}{n}\sum_{ij} u(e_{ij})(f_{ij})\Big|\,.$$

Nimmt man über die ganze Rechnung das Supremum über n, so erhält man also $\|u\|_{cb} \geq \|u\|_{tb}$. $\|u\| \leq \|u\|_{tb}$ folgt unmittelbar, wenn man die erste Spurabbildung $(n = 1)$ betrachtet. □

Bemerkung
Für einen Operatorraum E ist im allgemeinen $T : E^* \otimes_{min} E \to C : e^* \otimes e \mapsto e^*(e)$ nicht beschränkt. Setze $E := M_n$. Sei e_{ij} die kanonische Basis von M_n und e^*_{ij} die zugehörigen biorthogonalen Funktionale in M_n^*. Sei $z = \sum_{ij} e^*_{ij} \otimes e_{ij}$. Dann ist $|T(z)| = |\sum_{ij} e^*_{ij}(e_{ij})| = n^2$, aber z ist die Idendität $M_n \to M_n$ in $cb(M_n, M_n)$, also $\|z\|_{M_n^* \otimes M_n} = \|id\|_{cb(M_n,M_n)} = 1$. Für $E := K$ ist damit $\|T\| = \infty$. (Hinweis: Statt $e^*_{ij}(.)$ nimmt man $e^*_{ij}(P_n(.)P_n)$ und z wird damit zur Projektion $K \to M_n$).

5 Der Quotientenraum

Seien E und F Operatorräume, die wir wie immer vollständig annehmen. Dann kann man aber leicht zeigen, dass $M_n(E)$ ausgestattet mit der Matrizennorm schon abgeschlossen ist. Vor allem weil aus den Axiomen von Ruan folgt, dass die Norm eines Eintrages einer Matrix $x \in M_n(E)$ stets kleiner ist als $\|x\|$, also $\|x_{st}\|_E \leq \|(x_{ij})_{ij}\|_{M_n(E)}$ für alle $1 \leq s, t \leq n$. Aber man vergleiche auch etwa 2.8.(iii), wo die Vollständigkeit gezeigt wird. Also

$$(M_n \otimes E, min) = M_n \otimes_{min} E\,.$$

Sei nun F ein Teiloperatorraum von E. So kann man E/F zu einem Operatorraum machen, indem man setzt:

$$M_n \otimes (E/F) = (M_n \otimes E)/(M_n \otimes F) = (M_n \otimes_{min} E)/(M_n \otimes_{min} F). \tag{22}$$

Proposition 5.1
Seien $F \subseteq E$ Operatorräume. So wird E/F ein Operatorraum, indem man die Matrizennormen $M_n \otimes (E/F)$ gemäß (22) von $(M_n \otimes E)/(M_n \otimes F)$ holt.

Beweis 23
Ich überprüfe die AXIOME (R_1') und (R_2') von Ruan.

(R_1'):
Seien $\alpha, \beta \in M_n$ und $x \in M_n \otimes E$. Sei $x + F$ die Matrix, die entsteht, wenn man punktweise zu den Matrixeinträgen x_{ij} F addiert, also $x + F \in M_n \otimes (E/F)$.
$\|\alpha(x + F)\beta\|_{M_n \otimes (E/F)} = \|\alpha x\beta + F\|_{M_n \otimes (E/F)} = \|\alpha x\beta + M_n \otimes F\|_{(M_n \otimes E)/(M_n \otimes F)}$
$\leq \|\alpha x\beta + \alpha y\beta\|_{M_n \otimes E}$ für beliebige $y \in M_n \otimes F$.
$\leq \|\alpha\|\, \|x + y\|_{M_n \otimes E}\, \|\beta\| \leq \|\alpha\|\, \|x + M_n \otimes F\|_{(M_n \otimes E)/(M_n \otimes F)}\, \|\beta\| + \varepsilon$
für ein geeignetes $y \in M_n \otimes F$.
$= \|\alpha\|\, \|x + F\|_{M_n \otimes (E/F)}\, \|\beta\| + \varepsilon$

(R_2'):
Seien $x \in M_n \otimes E$ und $y \in M_m \otimes F$. Unter Ausnutzung der Axiome von Ruan für E und F ergibt sich:

$\left\|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + F\right\|_{M_{n+m}\otimes(E/F)} = \left\|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + M_{n+m}\otimes F\right\|_{(M_{n+m}\otimes E)/(M_{n+m}\otimes F)}$
$= \inf_{\max\{\|x_2\|,\|y_2\|\}=1} \left\|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\right\|_{M_{n+m}\otimes E}$
$= \inf_{x_2,y_2} \max\{\|x+x_2\|_{M_n\otimes E}\,,\,\|y+y_2\|_{M_m\otimes E}\}$
$\geq \max\{\|x+M_n\otimes F\|_{(M_n\otimes E)/(M_n\otimes F)}\,,\,\|y+M_n\otimes F\|_{(M_m\otimes E)/(M_m\otimes F)}\}$
$= \max\{\|x+F\|_{M_n\otimes(E/F)}\,,\,\|y+F\|_{M_m\otimes(E/F)}\}$
Die Ungleichung $\leq$ macht man ganz ähnlich durch leichte Modifikation dieser Rechnung. □

Lemma 5.2
(i) Seien E, F Operatorräume, $u : E \to F$ beschränkt und $A{:=}ker(u)$. Dann ist u vollständig beschränkt genau dann, wenn $\tilde{u} : E/A \to F$ vollständig beschränkt ist und es gilt

$$\|\tilde{u}\|_{cb} = \|u\|_{cb}$$

(ii) Sei E ein Operatorraum und $F \subseteq E$ ein Teiloperatorraum. Dann ist die Quotientenabbildung $\pi : E \to E/F$ vollständig beschränkt mit $\|\pi\|_{cb} = 1$ (außer $\pi = 0$).

Beweis 24
Man verwendet zum Beweis analoge Aussagen für Banachräume .
(i) Offensichtlich hat $id_n\otimes u$ den Kern $M_n\otimes A$. Damit lässt sich $id_n\otimes\tilde{u} : M_n\otimes(E/A) \to M_n\otimes F$ faktorisieren in der Form

$$id_n\otimes\tilde{u} : M_n\otimes(E/A) = (M_n\otimes E)/(M_n\otimes A) = (M_n\otimes E)/ker(id_n\otimes u) \to^{v} M_n\otimes F\,.$$

Also $\|id_n\otimes\tilde{u}\| = \|v\| = \|id_n\otimes u\|$. D.h., u c.b. genau dann wenn $\tilde{u}$ c.b.
(ii) Es ist doch $id_n\otimes\pi : M_n\otimes E \to M_n\otimes E/F = (M_n\otimes E)/(M_n\otimes F)$, d.h. $id_n\otimes\pi$ ist auch eine Quotientenabbildung und hat damit Norm 1. □

Inwiefern "gleiche" Operatorräume gleiche Quotientenräume ergeben, soll auch noch vermerkt werden. Wenn $E_1 = E_2$ Operatorräume, also wenn es einen vollst. beschr. isometr. Isomorph. $\pi : E_1 \to E_2$ gibt, und F_1 ein Teiloperatorraum von E_1 ist, dann *muss* man im allgemeinen $F_2 := \pi(F_1)$ wählen, um $E_1/F_1 = E_2/F_2$ zu erhalten.

Lemma 5.3
Seien E_1, E_2 Operatorräume und $\pi : E_1 \to E_2$ vollständig isometrisch. Sei $F_1 \subseteq E_1$ ein Teiloperatorraum. Dann gilt

$$E_1/F_1 = \pi(E_1)/\pi(F_1) \subseteq E_2/\pi(F_1) \tag{23}$$

Beweis 25
Betrachte die vollständig kontraktive Abb. $u : E_1 \to^{\pi} \pi(E_1) \to \pi(E_1)/\pi(F_1)$ (beachte 5.2.(ii)). Dann ist $ker(u) = F_1$ und mit 5.2.(i) ist $\tilde{u} : E_1/F_1 \to \pi(E_1)/\pi(F_1)$ auch vollständig kontraktiv und sicherlich auch injektiv und surjektiv. Es ist $\tilde{u}(e_1 + F_1) = \pi(f_1) + \pi(F_1)$.

Macht man das gleiche mit π^{-1} statt mit π, so erhält man eine vollst. konstraktive Abb. $\tilde{v} : \pi(E_1)/\pi(F_1) \to E_1/F_1$, die sich als die Umkehrabb. von $\tilde{u}$ herausstellt. Also ist $\tilde{u}$ ein vollst. isometr. Isomorphismus.
Für die letzte Inklusion in (23) nimmt man wieder eine analoge Aussage für Banachräume:

$$M_n \otimes \pi(E_1)/\pi(F_1) = (M_n \otimes \pi(E_1))/(M_n \otimes \pi(F_1))$$

$$\subseteq (M_n \otimes E_2)/(M_n \otimes \pi(F_1)) = M_n \otimes E_2/\pi(F_1)$$

Und das ist letztendlich die identische Abbildung. □

Lemma 5.4
Sei E ein Operatorraum und $F \subseteq E$. Sei $\varepsilon > 0$ und $z := \sum_{k=1}^{N} x_k \otimes e_k \in M_n \otimes E$. Dann gibt es einen endlichdimensionalen Teilraum $E_0 \subseteq E$ mit $e_1, ..., e_N \in E_0$, sodass für alle Räume E_1 mit $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E$ gilt

$$\Big| \|z + M_n \otimes F\|_{M_n \otimes (E/F)} - \|\sum_k z + M_n \otimes (F \cap E_1)\|_{M_n \otimes [E_1/(F \cap E_1)]} \Big| < \varepsilon\,.$$

Ist zudem $z \in M_n \otimes \tilde{E}$, wo $\tilde{E} \subseteq E$ dicht liegt in E, so kann man $E_0 \subseteq \tilde{E}$ wählen.

Beweis 26
Bemerkung: die obige Schreibweise ist so aufzufassen: $z + M_n \otimes F \in (M_n \otimes E)/(M_n \otimes F) = M_n \otimes (E/F)$.
Sei $E_0 := lin\{e_1, ..., e_N\} \subseteq E$ und $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E$. Dann ist

$$\alpha := \|z + M_n \otimes F\|_{(M_n \otimes E)/(M_n \otimes F)} \leq \|z + M_n \otimes (F \cap E_1)\|_{(M_n \otimes E_1)/(M_n \otimes (F \cap E_1))}\,,$$

da man ja für beide Ausdrücke ein Infimum bilden muss und bei der Berechnung von α das Infimum über mehr Zahlen genommen wird. Anderenseits gibt es Elemente $y_1, ..., y_s \in M_n$ und $g_1, ..., g_s \in F$, sodass

$$\alpha + \varepsilon > \|z + \sum_t y_s \otimes g_t\| \geq \inf_{w \in M_n \otimes (F \cap E_1)} \|z + w\|_{M_n \otimes (F \cap E_1)}\,, \tag{24}$$

wobei nun E_0 so groß gewählt sei, dass zusätzlich die $g_1, ..., g_s \in E_0$ sind und wiederum E_1 beliebig mit $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E$. Die erste Behauptung ist gezeigt.
Für die zweite Behauptung braucht man den obigen Beweis nur leicht zu modifizieren: es genügte ja, dass $e_1, ..., e_N, g_1, ..., g_s \in E_0$. Da $\tilde{E}$ dicht in E, ist $\tilde{E} \cap F$ dicht in F und man wähle einfach die $g_t \in \tilde{E} \cap F$ und die Rechnung in (24) geht genauso auf. □

Lemma 5.4 soll das Prinzip zeigen. Speziell benötigen wir folgende Aussage:
Wenn E, G Operatorräume und $F \subseteq E$ und $\varepsilon > 0$ und $z \in M_n \otimes (E \otimes G)$ sind. Dann gibt es einen endlichdim. Teilraum $G_0 \subseteq G$ mit $z \in M_n \otimes (E \otimes G_0)$, sodass

$$\Big| \|z + M_n \otimes E \otimes_{min} G\|_{M_n \otimes [(E \otimes_{min} G)/(F \otimes_{min} G)]} \tag{25}$$

$$- \|z + M_n \otimes E \otimes_{min} G_0\|_{M_n \otimes [(E \otimes_{min} G_0)/(F \otimes_{min} G_0)]} \Big| < \varepsilon\,. \tag{26}$$

Man beweise das völlig analog wie 5.4, etwa zuerst für $M_n := M_1$, also sodass man M_n ignorieren kann. Der allgemeinere Fall mit M_n folgt dann direkt aus dem ersten, indem als neues E $M_n \otimes_{min} E$ wählt, und als neues F $M_n \otimes_{min} F$ wählt.

Lemma 5.5

Sei E ein Operatorraum und $F \subseteq E$ ein Teiloperatorraum. Dann gilt vollst. isometrisch

$$(K \otimes_{min} E)/(K \otimes_{min} F) = K \otimes_{min} (E/F)\,.$$

Beweis 27

Betrachte

$$\Phi : X := (K \otimes_{min} E)/(K \otimes_{min} F) \to K \otimes_{min} (E/F)$$

die so entsteht, dass man zuerst $id_K \otimes \pi : K \otimes_{min} E \to K \otimes (E/F)$ betrachtet, wo π die Quotientenabbildung ist. Sicherlich liegt dabei $K \otimes_{min} F$ im Kern. Man kann also die geforderte Abb. Φ bilden. Man argumentiert nun im Prinzip gleich, wie im Beweis von 5.4, nur dass man statt mit allen endlichen Teilräumen mit den Matrizen M_N $(N \geq 1)$ approximiert. Ich halte mich deswegen etwas kürzer. Man beachte, dass wegen 3.1 die Gesamtheit M aller Matrizen dicht liegt in K. Sei $N \geq 1$ beliebig. Sei $z + M_n \otimes K \otimes_{min} F \in M_n \otimes X$ mit $z \in M_n \otimes M_N \otimes_{min} E$. Dann gibt es ein $S \geq N$, sodass

$$\|z + M_n \otimes K \otimes_{min} F\|_{M_n \otimes X} \approx \|z + M_n \otimes M_S \otimes F\|_{(M_n \otimes M_S \otimes E)/(M_n \otimes M_S \otimes F)}$$

$$= \|z + \text{"der F-Rest bei E"}\|_{M_n \otimes M_S \otimes (E/F)} = \|id_n \otimes \Phi(z)\|_{M_n \otimes K \otimes_{min} (E/F)}\,.$$

Da man die Approximation beliebig genau ausführen kann, ist Φ eine vollständige Isometrie auf einem dichten Teilraum und damit auf X. Φ ist surjektiv, da das Bild nun erwiesenermaßen abgeschlossen ist. $\square$

6 Direkte Summen

Als Vereinbarung bezeichne ich die C^*-Algebra $\{\, (x_i)_{i \in I} \,|\, x_i \in A_i, \sup_{i \in I} \|x_i\| < \infty\}$, wo $(A_i)_{i \in I}$ C^*-Algebren sind, kurz mit $\oplus_{i \in I} A_i$.

Proposition 6.1

Seien A_i und B_i C^*-Algebren. Dann gilt als C^*-Algebren

$$(\oplus_i A_i) \otimes_{min} B \subseteq \oplus_i (A_i \otimes_{min} B)$$

Ist B endlichdimensional, so tritt hier sogar Gleichheit ein.

Beweis 28

Sei $C = (\oplus_s A_s) \otimes_{min} B$. Man betrachte die Einbettung

$$T : (\oplus_i a_i) \otimes b \mapsto (a_i \otimes b)_i$$

Das ist ein *-homomorphismus, der injektiv ist. Es bleibt also noch die Isometrie zu zeigen: Sei $z = \sum_k (\oplus_i a_{ik}) \otimes b_k \in C$. Dann ist

$$\|T(z)\| = \sup_i \|\sum_k a_{ik} \otimes b_k\|_{A_i \otimes_{min} B} \tag{27}$$

Betrachtet man jetzt den kontraktiven *-homomorphismus $C \to A_i \otimes_{min} B$ (für alle i), so lässt sich (27) also abschätzen zu

$$\leq \|\sum_k (\oplus_s a_{sk}) \otimes b_k\|_C \,.$$

Damit ist T eine Kontraktion, und umgekehrt muss die Norm von $T(z)$ größer gleich der minimalen C^*-Norm sein, die man im Definitionsbereich von T vorfindet.

Sei nun B endlichdimensional, Es bleibt die Surjektivität der Einbettung zu zeigen. So wähle eine Basis $b_1, ...b_n$ in B. Mit 2.8.(iii) lässt sich für jedes $w \in \oplus_i (A_i \otimes_{min} B)$ eine Darstellung $w = \oplus_i (\sum_s a_{is} \otimes b_s)$ wählen. Damit ist mit 2.8.(i)

$$\|a_{is}\| = \|a_{is} \otimes b_s\| \leq M \|\sum_s a_{is} \otimes b_s\| \leq M \|w\|$$

für alle i, sodass $\oplus_i a_{is} \in \oplus_i A_i$, sodass $T(\sum_s (\oplus_i a_{is}) \otimes b_s) = w$. $\square$

Definition 6.2

Seien $E_i \subseteq A_i$ Operatorenräume - eingebettet in C^*-Algebren A_i. So kann man leicht $\oplus_i E_i := \{\, (e_i)_i \mid e_i \in E_i \,, sup_i \|e_i\|_{E_i} < \infty\}$ mit einer Operatorraumstruktur ausstatten, indem man $\oplus_i E_i$ so einbettet:

$$\oplus_i E_i \subseteq \oplus_i A_i$$

D.h. man hat die Matrizennormen

$$M_n \otimes (\oplus_i E_i) \subseteq M_n \otimes (\oplus_i A_i) = \oplus_i (M_n \otimes A_i) \tag{28}$$

und damit ist die Norm auf $\oplus E_i$ genau die Supnorm (betrachte den Fall n=1).
Dass obige Definition von der Art der Einbettung unabhängig ist und damit nur von den Operatorräumen E_i selbst abhängt, garantiert der letzte Punkt unten stehenden Korollars.

Anmerkung: Es gibt Möglichkeiten, auch $E = \{\, (e_i)_i \mid \sum_i \|e_i\|^p_{E_i} < \infty\}$ zu einem Operatorraum zu machen, sodass die Operatorraumnorm auf E genau die p-Norm ist.

Korollar 6.3

Seien E_i und F Operatorräume. Dann gilt

$$(\oplus_i E_i) \otimes_{min} F \subseteq \oplus_i (E_i \otimes_{min} F) \qquad \textit{vollständig isometrisch}\,.$$

Ist F endlichdimensional, so tritt hier sogar Gleichheit ein.
Sind E_i und E_i' gleiche Operatorräume, also $E_i = E_i' \,\forall i$, dann ist $\oplus_i E_i = \oplus_i E_i'$ vollständig isometrisch.

Beweis 29

Seien $E_i \subseteq A_i$ und $F \subseteq B$ mit A_i, B C^*-Algebren. Es gibt mit 6.1 vollst. isometr. Abbildungen $a : (\oplus_i E_i) \otimes_{min} F \to \oplus_i (A_i \otimes_{min} B)$ und $b : \oplus_i (E_i \otimes_{min} F) \to \oplus_i (A_i \otimes_{min} B)$. Ist $q : (\oplus E_i) \otimes F \to \oplus_i (E_i \otimes F)$ die natürliche Einbettung, so ist $a = b \circ q$ und man kann die vollständige Isometrie $q = b^{-1} \circ a$ vollständig isometrisch auf $(\oplus_i E_i) \otimes_{min} F$ fortsetzen.
Für F endlichdimensional kopiere man den Beweis der analogen Behauptung in Proposition 6.1.
Wenn nun $u_i : E_i \to E_i'$ vollständig isometrisch isomorph sind, so gilt nun isometrisch:

$$M_n \otimes_{min} (\oplus_i E_i) = \oplus_i (M_n \otimes_{min} E_i) = \oplus_i (M_n \otimes_{min} E_i') = M_n \otimes_{min} (\oplus_i E_i')$$

und diese Umbettung entspricht genau der Abbildung $id_n \otimes (\oplus_i u_i)$. $\square$

Lemma 6.4

Seien G, E_i, F_i Operatorräume. Seien $u_i : E_i \to F_i$ lineare Abbildungen. Dann gelten
(i) $\oplus_i u_i : \oplus_i E_i \to \oplus F_i$ ist vollständig beschränkt genau dann wenn, $C := \sup_i \|u_i\|_{cb} < \infty$ und es gilt $\| \oplus_i u_i\|_{cb} = C$.
(ii) $E_j \subseteq \oplus_i E_i$ vollständig isometrisch für alle j.
(iii) Für die durch die u_i erzeugten Abbildungen $a : G \otimes_{min} (\oplus E_i) \to G \otimes_{min} (\oplus F_i)$ und $b : \oplus(G \otimes_{min} E_i) \to \oplus(G \otimes_{min} F_i)$ gilt: a ist c.b. genau dann wenn b c.b. und es gilt $\|a\|_{cb} = \|b\|_{cb}$.

Beweis 30

Man verwendet hier teilweise analoge Aussagen über Banachräume.
(i) Sei $C < \infty$. Sei $u := \oplus u_i$, dann lässt sich $id_n \otimes u$ faktorisieren durch

$$id_n \otimes u : M_n \otimes (\oplus E_i) = \oplus(M_n \otimes E_i) \to \oplus(M_n \otimes F_i) = M_n \otimes (\oplus F_i)$$

und es ist also $\|id_n \otimes u\| = \sup_i \|id_n \otimes u_i\|$. Also ist $\|u\| = \sup_n \sup_i \|id_n \otimes u_i\| = \sup_i \|u_i\|_{cb} = C$.
(ii) $M_n \otimes E_j \to \oplus(M_n \otimes E_i) = M_n \otimes (\oplus E_i)$ ist eine Isometrie für alle n.
(iii) Sei a vollständig beschränkt. Wegen (ii) ist $G \otimes_{min} E_i \subseteq G \otimes_{min} (\oplus E_i)$ Also ist $G \otimes_{min} E_i \to G \otimes_{min} F_i$ die Einschränkung von a und damit c.b. mit $\leq \|a\|_{cb}$. Mit (i) ist damit b c.b. mit $\|b\|_{cb} \leq \|a\|_{cb}$. Sei nun umgekehrt b vollständig beschränkt. Dann ist wegen 6.3 a die Einschränkung von b und also $\|a\|_{cb} \leq \|b\|_{cb}$. $\square$

Man erhält noch folgende Charakterisierung von vollständig beschränkten Abbildungen.

Lemma 6.5

Seien $L := \oplus_{n \geq 1} M_n$, E, F Operatorräume und $u : E \to F$ linear. Dann gilt:
u ist vollständig beschränkt (isomorph, isometrisch) genau dann, wenn $id_L \otimes_{min} u$ beschränkt (isomorph, isometrisch) ist und es gilt $\|u\|_{cb} = \|id_L \otimes u\| = \|id_L \otimes u\|_{cb}$.

Beweis 31
Sei u vollständig beschränkt, dann ist klarerweise $\tilde{u} := id_L \otimes u$ vollständig beschränkt mit $\|\tilde{u}\|_{cb} \leq \|u\|_{cb}$. Sei umgekehrt $\tilde{u}$ beschränkt, dann sind die Einschränkungen $M_n \otimes E \to M_n \otimes F$ beschränkt durch $\|\tilde{u}\|$, also $\|u\|_{cb} \leq \|\tilde{u}\|$.
Sei u ein vollständiger Isomorphismus. Also sind $a_n : M_n \otimes E \to M_n \otimes F$ Isomorphismen für alle n mit glm. Schranke $C := \|u\|_{cb}$. Damit ist mit 6.4.(i) $a : \oplus(M_n \otimes E) \to \oplus(M_n \otimes F)$ beschränkt mit C und offensichtlich auch injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus. Da $\tilde{u}$ eine Einschränkung von a ist wegen 6.3, und damit insbesondere abgeschlossenes Bild hat und $L \otimes F$ im Bild von $\tilde{u}$ liegt, ist $\tilde{u}$ ein Isomorphismus. Sei umgekehrt $\tilde{u}$ ein Isomorphismus, dann auch die Einschränkungen a_n.
Im Isometriefall hat man vollständige Isomorphismen mit $1 = \|u\|_{cb} \, \|u^{-1}\|_{cb} = \|\tilde{u}\| \, \|\tilde{u}^{-1}\|$. □

7 Ultraprodukte

Ich möchte kurz wiederholen, was Ultraprodukte sind.
Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie von Banachräumen. So ist $\oplus_i E_i = \{ (e_i)_{i \in I} \mid \sup_i \|e_i\| < \infty \}$ ein Banachraum mit der *sup*-Norm. Sei nun ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I gegeben. Dann ist

$$N_{\mathcal{U}} := \{ \lim_{\mathcal{U}} \|e_i\| = 0 \mid \oplus_i \, e_i \in \oplus_i E_i \} \tag{29}$$

ein abgeschlossener Teilraum von E. Ich beziehe mich darauf als den "Kern, den $\mathcal{U}$ in $\oplus_i E_i$ erzeugt". Der Quotientenraum $(\oplus_i E_i)/N_{\mathcal{U}}$ ist ein Banachraum, den man mit

$$\prod_{i \in I} E_i/\mathcal{U} \qquad \text{oder} \qquad \oplus_{i \in I} \, E_i/\mathcal{U} \quad \text{(hier bevorzugt)}$$

bezeichnet. Eben das Ultraprodukt der Familie $(E_i)_{i \in I}$ bezüglich des Ultrafilters $\mathcal{U}$.
Man beachte, dass für $\oplus_i e_i \in \oplus_i E_i$ gilt:

$$\| \oplus_i \, e_i + N_{\mathcal{U}} \|_{\oplus_i E_i/\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|e_i\|_{E_i} \, , \tag{30}$$

sodass die Quotientenbildung $\oplus E_i/N_{\mathcal{U}}$ in gewisser Weise dem Grenzwert der Räume E_i entlang des Ultrafilters $\mathcal{U}$ gleichkommt.
Sind E_i C^*-Algebren, so ist $N_{\mathcal{U}}$ ein abgeschlossenes Ideal in $\oplus E_i$ und damit ist $\oplus_i E_i/\mathcal{U}$ eine C^*-Algebra.

Aufgrund der Definition (29) ist es nicht wesentlich, ob man $\mathcal{U}$ selbst nimmt oder irgendeine Filterbasis $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. Es ist dann $\oplus_i E_i/\mathcal{W} = \oplus_i E_i/\mathcal{U}$. Wenn nun $u \in \mathcal{U}$, so bildet $\mathcal{W} := \{ x \cap u \mid x \in \mathcal{U} \}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}$. Es gilt dann isometrisch isomorph

$$\oplus_{i \in I \cap u} \, E_i/\mathcal{W} = \oplus_{i \in I} \, E_i/\mathcal{U} \, . \tag{31}$$

Man kann sich leicht überlegen, dass $\mathcal{W}$ eine Ultrafilterbasis (und sogar ein Filter, wenn $\mathcal{U}$ ein Filter) auf $I \cap u$ ist, d.h. $\mathcal{W}$ kann nicht echt verfeinert werden (Übung). Man bette in (31) einfach so ein: $\pi : \oplus_{i \in I \cap u} e_i + N_{\mathcal{W}} \mapsto \oplus_{i \in I} e_i + N_{\mathcal{U}}$, wobei man im Wertebereich die fehlenden Koordinaten 0 setzt. Da $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ eine Teilfilterbasis ist, folgt mit (30), dass π eine Isometrie ist. Aus dem im Prinzip gleichen Grund ist π surjektiv wegen (29).

Lemma 7.1

Seien $Y_i \subseteq X_i$ Banachräume und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf der Indexmenge. Dann gelten
(i) $\oplus_i Y_i/\mathcal{U} \subseteq \oplus_i X_i/\mathcal{U}$
(ii) $\oplus_i (X_i/Y_i)/\mathcal{U} = [\oplus_i X_i/\mathcal{U}]/[\oplus_i Y_i/\mathcal{U}]$

Beweis 32

(i) Betrachte die natürliche Abbildung $\oplus_i Y_i \to \oplus_i X_i \to \oplus_i X_i/\mathcal{U}$. Diese hat genau den Kern $\{ (x_i) \in \oplus_i Y_i \mid \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0 \}$. Also ist $\oplus_i Y_i/\mathcal{U} \subseteq \oplus_i X_i/\mathcal{U}$ und zwar isometrisch, da $\|(x_i)\|_{\oplus X_i/\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \|(x_i)\|_{\oplus Y_i/\mathcal{U}}$.
(ii) Seien $X := \oplus_i X_i$ und $Y := \oplus_i Y_i$. Sei $x \in [X/\mathcal{U}]/[Y/\mathcal{U}]$. Sei $x' \in X/\mathcal{U}$ ein Repräsentant von x und $(x_i)_i \in X$ ein Repräsentant von x'. Die Norm von x erechnet sich durch - unter Beachtung von (i) -

$$\|x\| = \inf_{y \in Y/\mathcal{U}} \|x' + y\|_{X/\mathcal{U}} = \inf_{(y_k)_k \in Y} \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + y_i\|_{X_i} \tag{32}$$

Sei $I_{\mathcal{U}}$ der von $\mathcal{U}$ erzeugten Kern in $\oplus_i (X_i/Y_i)$. Betrachte nun die Surjektion - ohne Beachtung auf Wohldefiniertheit -

$$T : [X/\mathcal{U}]/[Y/\mathcal{U}] \to \oplus_i (X_i/Y_i)/\mathcal{U} \; : \; x \mapsto (x_i + Y_i)_i + I_{\mathcal{U}} \, .$$

Es ist

$$\|T(x)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + Y_i\|_{X_i/Y_i} = \lim_{\mathcal{U}} \inf_{y \in Y_i} \|x_i + y\|_{X_i} \tag{33}$$

Für die Isometrie von T ist also eine Limes-Infimumsvertauschung zu zeigen: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Seien $\tilde{y}_i \in Y_i$ so gewählt, dass $\|x_i + \tilde{y}_i\| \leq \inf_{y \in Y_i} \|x_i + y\| + \varepsilon \; \forall i$. Dann ist

$$\|x_i + \tilde{y}_i\| \leq \inf_{y_i \in Y_i} \|x_i + y\| + \varepsilon \leq \|x_i + z_i\| + \varepsilon \qquad \forall i \; \forall z_i \in Y_i$$

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x_i + \tilde{y}_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \inf_{y \in Y_i} \|x_i + y\| + \varepsilon \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + z_i\| + \varepsilon \qquad \forall (z_k)_k \in Y$$

$$\inf_{(y_k)_k \in Y} \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + y_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + \tilde{y}_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \inf_{y \in Y_i} \|x_i + y\| + \varepsilon \leq \inf_{(y_k)_k \in Y} \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + y_i\| + \varepsilon$$

Mit (32) und (33) ist damit T eine Isometrie und damit sicher wohldefiniert: Genauer haben wir T implizit definiert in der Form $T \circ \pi(r) = f(r)$ mit einer Abbildung f und einer Abbildung π, die jeden Repräsentanten r in den Definitionsbereich von T überführt. Wir haben gezeigt, dass $\|\pi(r)\| = \|f(r)\|$ für alle r. Also ist $ker(\pi) = ker(f)$. Nach einer Rechenregel ist damit das implizit gegebene T eine Funktion. □

Lemma 7.2

(i) Seien Banachräume $(E_i)_{i \in I}$, $(F_i)_{i \in I}$ gegeben und $(u_i : E_i \to F_i)_{i \in I}$ beschränkt linear mit $\sup_i \|u_i\| < \infty$. *Dann wird durch $\oplus_i u_i$ eine Abbildung - Bezeichnung $\oplus_i u_i/\mathcal{U}$ -*

$$\oplus_i u_i/\mathcal{U} : \oplus_i E_i/\mathcal{U} \to \oplus_i F_i/\mathcal{U} \qquad \textit{mit} \qquad \|u\| = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|$$

induziert.
(ii) $\oplus_{i\in I} E/\mathcal{U} = E$ *als Banachräume für alle endlichdimensionalen Banachräume* E *mittels* $\oplus_i e_i + N_{\mathcal{U}} \mapsto \lim_{\mathcal{U}} e_i$.

Der Beweis ist sehr einfach.

Ich finde es sehr praktisch, wenn man mit Ultraprodukten arbeitet, dass man den Kern, den ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\oplus_i E_i$ erzeugt, einfach etwa mit I bezeichnet, sodass also $\oplus_i E_i/\mathcal{U} = \oplus_i E_i/I$. Wenn $\oplus_i F_i$ eine weitere direkte Summe ist, dann bezeichne den von $\mathcal{U}$ erzeugten Kern wieder mit I. Dann lassen sich die Elemente aus $z \in \oplus_i E_i/\mathcal{U}$ bzw. $w \in \oplus_i F_i/\mathcal{U}$ in der Form schreiben: $z = \oplus_i e_i + I$ und $w = \oplus_i f_i + I$. D.h. das I signalisiert "modulo den durch $\mathcal{U}$ erzeugten Kern". Schreibt man nun versuchsweise die Räume ebenfalls in diesem Sinne, also $\oplus_i E_i/\mathcal{U} =: \oplus_i E_i + I$, so lässt sich schneller ablesen, wie gewisse Umbettungen aussehen.
Beispiel anhand der Aussage 7.2: Die $u_i : E_i \to F_i$ erzeugen eine Abbildung $\oplus_i u/\mathcal{U} : \oplus_i E_i + I \to \oplus_i F_i + I$. Anhand der Form der Räume drängt sich schon auf, wie u aussehen wird, nämlich einfach am natürlichsten:

$$\oplus_i u_i/\mathcal{U} : \oplus_i e_i + I \mapsto \oplus_i u_i(e_i) + I\,.$$

Und tatsächlich ist das die Vorschrift für die in 7.2 eingeführte Abbildung $\oplus_i u_i/\mathcal{U}$. Würde man diese Abbildung mit $\oplus_i u_i + I$ bezeichnen, so wäre noch klarer wie sie aussieht.
Die Bezeichnung I ist hier reine Willkür und darf im Folgendem nicht mit der ebenfalls machmal so bezeichneten Indexmenge I in $(E_i)_{i\in I}$ verwechselt werden.

Definition 7.3
Seien $(E_i)_{i\in I}$ *Operatorräume und* $\mathcal{U}$ *ein Ultrafilter auf I. Sei* $N_{\mathcal{U}}$ *der von* $\mathcal{U}$ *in* $E := \oplus_i E_i$ *erzeugte Kern. Sei* $N_{\mathcal{U}}$ *aufgefasst als Teiloperatorraum von E. Dann sei das Ultraprodukt der* E_i *definiert als der Quotientenoperatorraum*

$$\oplus_{i\in I} E_i/\mathcal{U} := (\oplus_{i\in I} E_i)/N_{\mathcal{U}} \qquad \textit{vollständig isometrisch}\,.$$

Man beachte, dass die Norm des Operatorraumes $\oplus_i E_i$ mit der Supnorm übereinstimmt und dass die Norm eines Operatorraumes, der Quotient von Operatorräumen ist, mit der gewöhnlichen Quotientennorm übereinstimmt, sodass letztendlich die Norm von $\oplus_i E_i/\mathcal{U}$ mit der gewöhnlichen Norm - aufgefasst als Ultraprodukt von Banachräumen - übereinstimmt.

Lemma 7.4
Seien $F_i \subseteq E_i$ *Operatorräume und* $\mathcal{U}$ *ein Ultrafilter auf der Indexmenge. Dann gelten vollständig isometrisch*
(i) $M_n \otimes_{min} (\oplus_i E_i/\mathcal{U}) = \oplus_i (M_n \otimes_{min} E_i)/\mathcal{U}$ *für alle* $n \geq 1$.
(ii) $\oplus_i F_i/\mathcal{U} \subseteq \oplus_i E_i/\mathcal{U}$
(iii) $[\oplus_i E_i/\mathcal{U}]/[\oplus_i F_i/\mathcal{U}] = \oplus_i (E_i/F_i)/\mathcal{U}$
(iv) $E_i = F_i\ \forall i$, *dann ist* $\oplus_i E_i/\mathcal{U} = \oplus_i F_i/\mathcal{U}$.

Beweis 33

(i) Sei $N_{\mathcal{U}}$ der von $\mathcal{U}$ in $\oplus_i E_i$ erzeugte Kern. Es gilt dann isometrisch per Definition

$$M_n \otimes_{min} (\oplus_i E_i/\mathcal{U}) = M_n \otimes_{min} [(\oplus_i E_i)/N_{\mathcal{U}}] = [M_n \otimes_{min} (\oplus_i E_i)]/[M_n \otimes_{min} N_{\mathcal{U}}]\,. \tag{34}$$

Betrachtet man den vollständig isometrischen Isomorphismus $\pi : M_n \otimes (\oplus E_i) \to \oplus(M_n \otimes E_i)$ (siehe 6.3), so folgt mit 5.3, dass (34) weitergleich ist

$$= \oplus(M_n \otimes_{min} E_i)/\pi(M_n \otimes_{min} N_{\mathcal{U}})\,.$$

Man ist fertig, wenn der von $\mathcal{U}$ in $\oplus(M_n \otimes E_i)$ erzeugte Kern gerade gleich $\pi(M_n \otimes_{min} N_{\mathcal{U}})$ ist. Das zeigt aber eine einfache Rechnung unter Zuhilfenahme der Ungleichung 2.8.(i).

Also gilt (i) schon isometrisch und daraus kann man schon (iv) ablesen: es gilt nämlich isometrisch

$$M_n \otimes (\oplus E_i/\mathcal{U}) = \oplus(M_n \otimes E_i)/\mathcal{U} = \oplus(M_n \otimes F_i)/\mathcal{U} = M_n \otimes (\oplus F_i/\mathcal{U})$$

und ist von der Form $id_n \otimes u$.
Durch zweifache Anwendung von (i) und $M_k \otimes M_n = M_{k.n}$ erhält man jetzt die vollständige Isometrie von (i): es gilt isometrisch

$$M_k \otimes M_n \otimes (\oplus_i E_i/\mathcal{U}) = \oplus_i[M_k \otimes M_n \otimes E_i]/\mathcal{U} = M_k \otimes [\oplus_i(M_n \otimes E_i)/\mathcal{U}]$$

und ist von der Form $id_k \otimes u$.

(ii) Kombination von (i) und 7.1 ergibt isometrisch

$$M_n \otimes_{min} (\oplus_i F_i/\mathcal{U}) = \oplus_i(M_n \otimes_{min} F_i)/\mathcal{U} \subseteq \oplus_i(M_n \otimes_{min} E_i)/\mathcal{U} = M_n \otimes_{min} (\oplus_i E_i/\mathcal{U})\,.$$

Punkt (iii) läuft analog. □

Wir benötigen im Kapitel "Exaktheit" noch folgendes technische Lemma. Systematisch gehört es aber zu den Ultraprodukten.

Lemma 7.5

Sei J eine Indexmenge. Seien I_j weitere Indexmengen $\forall j \in J$. Seien $\mathcal{U}_j$ Ultrafilter auf I_j für alle $j \in J$. Sei $I := \prod_{j\in J} I_j$. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I, sodass gilt: für beliebige Familien von Operatorräumen $(E_{j,i})_{j\in J, i\in I_j}$ gilt: für alle $s \in J$ gilt vollständig isometrisch: (dabei $\alpha = (\alpha_j)_{j\in J} \in I$, wo $\alpha_j \in I_j$)

$$\oplus_{i\in I_s} E_{s,i}/\mathcal{U}_s \subseteq \oplus_{\alpha\in I}[\oplus_{j\in J} E_{j,\alpha_j}]/\mathcal{U} \tag{35}$$

Beweis 34

Setze die Einbettung in (35) - nenne sie T - wie folgt. Jedem Repräsentanten im Definitionsraum ordne - ohne Beachtung auf Wohldefiniertheit - einen Repräsentanten im Werteraum zu: Sei $s \in J$ fest. Für $\alpha \in I$ ist doch

$$E_{s,\alpha_s} \subseteq \oplus_{j\in J} E_{j,\alpha_j} \tag{36}$$

isometrisch, indem man die restlichen Koordinaten einfach 0 setzt. Im Sinne von (36) ordne einen gegebenen Repräsentanten $\oplus_{i\in I_s} e_{s,i}$ im Definitionsbereich dem Repräsentanten $\oplus_{\alpha\in I}\, e_{s,\alpha_s} \in \oplus_\alpha E_{s,\alpha_s} \subseteq \oplus_\alpha[\oplus_{j\in J} E_{j,\alpha_j}]$ im Wertebereich zu.
Setze $\mathcal{W} := \prod_{j\in J}\mathcal{U}_j$, also das "Produkt von Filterbasen" und wird bekanntlich analog wie das "Produkt von topologischen Räumen" gesetzt. $\mathcal{W}$ ist eine Filterbasis auf I und kann zu einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I ergänzt werden.
Beh.: T ist eine vollständige Isometrie:
Es ist (in Repräsentantenschreibweise) $\|x := \oplus_{i\in I_s}\, e_{s,i}\|_{\oplus_{i\in I_s} E_{s,i}/\mathcal{U}_s} = \lim_{\mathcal{U}_s} \|e_{s,i}\|_{E_{s,i}} =: \beta$. Und die Norm des Bildelementes unter T errechnet sich unter Beachtung von (36) durch $\|T(x)\| = \lim_{\alpha\to\mathcal{U}} \|e_{s,\alpha_s}\|_{E_{s,\alpha_s}} =: \gamma$. Betrachte nun $f : I \to \mathcal{R} : \alpha \mapsto \|e_{s,\alpha_s}\|_{E_{s,\alpha_s}}$. Beachte, dass γ der Limes von $f(\mathcal{U})$ ist. Setze $\mathcal{W}_s :=$ die Menge aller $\prod_{j\in J, j\neq s} I_j \times M$, wo $M \in \mathcal{U}_s$. Dann ist aufgrund von Konstruktion $\mathcal{W}_s \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ und damit auch deren Bilder unter f. Beachte, dass $\mathcal{W}_s$ eine Filterbasis auf I ist. Nun ist aber

$$f(\mathcal{W}_s) = \left\{ \{\, \|e_{s,m}\| \mid m \in M \,\} \,\middle|\, M \in \mathcal{U}_s \right\}.$$

Betrachtet man nochmal, wie β gesetzt wurde, so sieht man, dass β der Limes der Filterbasis $f(\mathcal{W}_s)$ ist. Also hat die Filterbasis $f(\mathcal{U})$ mit Limes γ eine konvergente Teilfilterbasis $f(\mathcal{W}_s) \subseteq f(\mathcal{U})$ mit Limes β. Also müssen die beiden Limiten zusammenfallen, also $\alpha = \beta$.
Wir haben damit gezeigt, dass T eine Isometrie ist und damit ist T auch sicher wohldefiniert (Argumentazion wie im Beweisende von 7.1). Dass T eine vollständige Isometrie ist, folgt nun in Kombination von 7.4.(i) und 6.3 (für $F := M_n$), indem man einfach in dem schon erhaltenen Resultat die Räume $(E_{j,i})_{j\in J, i\in I_j}$ durch die Räume $(M_n \otimes E_{j,i})_{j\in J, i\in I_j}$ ersetzt und T wird zu $id_n \otimes T$. $\square$

Proposition 7.6

Seien E_i, F Operatorräume. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf der Indexmenge. Sei $N_\mathcal{U}$ der von $\mathcal{U}$ in $\oplus_i E_i$ erzeugte Kern. Dann gilt vollständig isometrisch

$$((\oplus_i E_i)\otimes_{min} F)/(N_\mathcal{U}\otimes_{min} F) \subseteq \oplus_i(E_i\otimes_{min} F)/\mathcal{U}\,.$$

Wenn F endlichdimensional ist, dann tritt hier sogar Gleichheit ein.

Beweis 35

Sei F endlichdimensional. Dann betrachte den üblichen, vollständig isometrischen Isomorphismus $\pi : (\oplus_i E_i)\otimes_{min} F \to \oplus_i(E_i \otimes_{min} F)$. Also ist mit 5.3

$$((\oplus_i E_i)\otimes_{min} F)/(N_\mathcal{U}\otimes_{min} F) = \oplus(E_i\otimes_{min} F)/\pi(N_\mathcal{U}\otimes_{min} F)\,.$$

Eine einfache Rechnung unter Zuhilfenahme von 2.8.(i) zeigt weiter, dass der von $\mathcal{U}$ erzeugte Kern in $\oplus(E_i\otimes_{min} F)$ gerade gleich $\pi(N_\mathcal{U}\otimes_{min} F)$ ist, womit die Behauptung steht.
Sei nun F beliebig. Für alle endlichdimensionalen Teilräume $F_0 \subseteq F$ betrachte die vollständige isometrische Einbettung (beachte 7.4.(ii))

$$((\oplus_i E_i)\otimes_{min} F_0)/(N_\mathcal{U}\otimes_{min} F_0) = \oplus_i(E_i\otimes_{min} F_0)/\mathcal{U} \subseteq \oplus_i(E_i\otimes_{min} F)/\mathcal{U}\,. \qquad (37)$$

Sei I der von $\mathcal{U}$ in $\oplus(E_i \otimes_{min} F)$ erzeugte Kern. Sei $\pi : (\oplus_i E_i) \otimes_{min} F \to \oplus_i(E_i \otimes_{min} F)$ die übliche vollst. isometrische Einbettung. Betrachte die Abbildung (ohne Beachtung auf Wohldefiniertheit)

$$T : ((\oplus_i E_i) \otimes F)/(N_\mathcal{U} \otimes_{min} F) \to \oplus_i(E_i \otimes_{min} F)/\mathcal{U} : z + N_\mathcal{U} \otimes_{min} F \mapsto \pi(z) + I\,.$$

Der Definitionsbereich von T ist hier als Teilraum von $((\oplus_i E_i) \otimes_{min} F)/(N_\mathcal{U} \otimes_{min} F)$ aufzufassen. Beh.: T ist eine (vollständige) Isometrie:
Beachte, dass die Einbettung (37) ähnlich wie T aussieht: $z + N_\mathcal{U} \otimes_{min} F_0 \mapsto \pi(z) + I$. Bezeichne den Definitionsbereich von T mit X. Beachte nun die Approximation in (25) und (26). Gemäß dieser Aussage kann man sich für $z + M_n \otimes N_\mathcal{U} \otimes_{min} F \in M_n \otimes X$ einen endlichdimensionalen Teilraum $F_0 \in F$ wählen, sodass

$$\begin{aligned} \alpha &:= \|z + M_n \otimes N_\mathcal{U} \otimes_{min} F\|_{M_n \otimes X} \\ &\approx \|z + M_n \otimes N_\mathcal{U} \otimes_{min} F_0\|_{M_n \otimes [((\oplus_i E_i) \otimes_{min} F_0)/(N_\mathcal{U} \otimes_{min} F_0)]} =: \beta\,. \end{aligned}$$

Bettet man das rechts neben dem Approximationszeichen stehende Element gemäß (37) weiter ein, und beachtet, dass diese Einbettung im Prinzip wie T aufgebaut ist, dann folgt nun weiter

$$\alpha \approx \beta = \|(id_n \otimes \pi)(z) + M_n \otimes I\|_{M_n \otimes [\oplus_i (E_i \otimes_{min} F)/\mathcal{U}]} \tag{38}$$

Da man die Approximation beliebig genau ausführen kann, ist T eine vollständige Isometrie. So wie im Beweisende von 7.1 argumentiert, ist nun garantiert, dass T wohldefiniert ist, da eine Isometrie. Damit lässt sich T vollst. isometr. auf $((\oplus_i E_i) \otimes_{min} F)/(N_\mathcal{U} \otimes_{min} F)$ fortsetzen wegen 1.6. Damit ist alles gezeigt. □

Lemma 7.7
(i) [P, p36] Sind E_i, F_i Operatorräume und $u_i \in cb(E_i, F_i)$ mit $\sup_i \|u_i\|_{cb} < \infty$, so ist $u := \oplus_i u_i/\mathcal{U} : \oplus_i E_i/\mathcal{U} \to \oplus_i F_i/\mathcal{U}$ vollständig beschränkt mit

$$\|u\|_n = \lim_\mathcal{U} \|u_i\|_n \;\forall n \geq 1 \qquad \textit{und} \qquad \|u\|_{cb} \leq \lim_\mathcal{U} \|u_i\|_{cb}$$

(ii) Ist E ein endlichdimensionaler Operatorraum, so ist $\oplus_i E/\mathcal{U} = E$ vollständig isometrisch.
(iii) $\oplus_i cb(E_i, F_i)/\mathcal{U} \to cb(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, \oplus_i F_i/\mathcal{U})$ vermöge $\oplus_i u_i \mapsto \oplus_i u_i/\mathcal{U}$ ist eine vollständige Kontraktion. Sind alle E_i, F_i endlichdim. von der gleichen Dimension, dann ist die Abbildung injektiv.

Beweis 36
(i) Schreibe den Definitionsbereich und Wertebereich von $id_n \otimes u$ gemäß 7.4.(i) um und wende dann 7.2.(i) an, sodass also $\|id_n \otimes u\| = \lim_\mathcal{U} \|id_n \otimes u_i\|$.
Damit ist dann $\|u\|_{cb} = \lim_n \|u\|_n = \lim_n \lim_\mathcal{U} \|u_i\|_n \leq \lim_\mathcal{U} \|u_i\|_{cb}$.
(ii) Kombiniere analog 7.4.(i) und 7.2.(ii).
(iii) Ist nichts anderes als Aussage (i). Wir müssen noch die Injektivität für den endlichdim. Fall zeigen. Sei $\oplus u_i/\mathcal{U} = 0$. Dann ist $\lim_\mathcal{U} \|u_i(e_i)\| = 0$ für alle e_i mit $\sup \|e_i\| < \infty$. Wählt man speziell e_i mit $\|e_i\| = 1$ so, sodass $\|u_i(e_i)\| = \|u_i\|_{B(E_i,E_i)}$, dann ist also (siehe 2.9.(i)) $\lim_\mathcal{U} \|u_i\|_{cb} \leq n \lim_\mathcal{U} \|u_i\|_{B(E_i,E_i)} = 0$ w.z.z.w. □

Auffällig ist die Ungleichung $\|u\|_{cb} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_{cb}$. Es ist nämlich hier im allgemeinen keine Gleichheit zu erwarten, ganz im Gegensatz zur Banachraumversion, also wenn man die cb-Norm durch die gewöhnliche Norm ersetzt. Hätte man stets Gleichheit, so müsste nämlich jeder Operatorraum exakt sein, was falsch ist. Dass dann jeder Operatorraum exakt sein müsste, kann man bei sehr aufmerksamer Betrachtung des Beweises eines Satzes über die Charakterisierung von exakten Opertorräumen (s. Kapitel "Exaktheit") herauslesen.
Sei F ein endlichdimensionaler Operatorraum. So mag man sich fragen, ob auch 7.4.(i) gilt, wenn man M_n durch F ersetzt. Gilt nicht. Es gilt nur

$$a : F \otimes (\oplus_i E_i/\mathcal{U}) \approx \oplus_i (F \otimes E_i)/\mathcal{U} \qquad \text{vollständig isomorph.} \tag{39}$$

Klar, wenn F n-dimensional ist und $u : F \to M_n$ irgendeine lineare Injektion mit Bild $G := u(F)$, so lässt sich a faktorisieren durch ($E := \oplus_i E_i/\mathcal{U}$)

$$a : F \otimes E \to^{u \otimes id} G \otimes E = \oplus_i (G \otimes E_i)/\mathcal{U} \to^{\oplus_i (u^{-1} \otimes id_{E_i})/\mathcal{U}} \oplus_i (F \otimes E_i)/\mathcal{U}$$

mit 7.4.(i). Und mit 7.7 ist damit a beschränkt mit $\|a\|_{cb} \leq \|u\|_{cb} \lim_{\mathcal{U}} \|u^{-1} \otimes id_{E_i}\|_{cb} \leq \|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb}$ und die gleiche Abschätzung gilt für $\|a^{-1}\|_{cb}$.

Proposition 7.8 (P, p36 & Lemma 2.9.1)
Seien E_i Operatorräume. Dann gilt vollständig isometrisch

$$\oplus_i E_i^*/\mathcal{U} \subseteq (\oplus_i E_i/\mathcal{U})^*$$

Sind alle E_i endlichdimensional von der gleichen Dimension d, so tritt hier sogar Gleichheit ein.

Beweis 37
Betrachte die Einbettung - I stehe für einen Modulorest durch $\mathcal{U}$ erzeugt -

$$T : \oplus_i E_i^*/\mathcal{U} \to (\oplus_i E_i/\mathcal{U})^* : T(\oplus_i e_i^* + I)(\oplus_i e_i + I) := \lim_{\mathcal{U}} e_i^*(e_i)$$

Beachte, dass T wohldefiniert ist. Denn Definitionsbereich und Wertebereich von $id_n \otimes T$ schreibe man isometrisch um zu (beachte 7.4.(i), 7.7.(ii)):

$$M_n \otimes_{min} \oplus_i E_i^*/\mathcal{U} = \oplus_i (M_n \otimes_{min} E_i^*)/\mathcal{U} = \oplus_i cb(E_i, M_n)/\mathcal{U}$$

und

$$M_n \otimes_{min} (\oplus_i E_i/\mathcal{U})^* = cb(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, M_n) = cb(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, \oplus_i M_n/\mathcal{U})\,.$$

Damit wird (muss man nachrechnen) $id_n \otimes T$, aufgefasst als Abbildung $\oplus_i cb(E_i, M_n)/\mathcal{U} \to cb(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, \oplus_i M_n/\mathcal{U})$, zu (für die Def. $\oplus_i v_i/\mathcal{U}$ siehe 7.7.(i))

$$id_n \otimes T : \oplus_i v_i + I \mapsto \oplus v_i/\mathcal{U} \qquad (v_i \in cb(E_i, M_n))\,.$$

Für die Normen gilt $\| \oplus_i v_i\|_{\oplus_i cb(E_i, M_n)/\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_{cb}$. Das Bildelement von $id_n \otimes T$ ist eine Abbildung mit Wertebereich M_n. Also ergibt sich mit 4.6.(ii) und 7.7

$$\| \oplus_i v_i/\mathcal{U}\|_{cb} = \| \oplus_i v_i/\mathcal{U}\|_n = \lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_n = \lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_{cb}\,.$$

Also ist T eine vollständige Isometrie. $\square$

Folgendes kommt noch in den "Endlichdimensionalen Operatorräumen" und in der "Exaktheit" vor. Darum möchte ich es schon hier andiskutieren.
Seien E_i, F endlichdimensionale Operatorräume von gleicher Dimension. So gilt

$$cb(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, F) \approx \oplus_i cb(E_i, F)/\mathcal{U} \qquad \text{vollständig isomorph.} \tag{40}$$

Tatsächlich ist mit 7.8 und (39)

$$cb(\oplus E_i/\mathcal{U}, F) = (\oplus E_i/\mathcal{U})^* \otimes F = (\oplus E_i^*/\mathcal{U}) \otimes F \approx \oplus(E_i^* \otimes F)/\mathcal{U} = \oplus cb(E_i, F)/\mathcal{U}\,. \tag{41}$$

Damit ist alles gezeigt. Schauen wir uns nun genauer an, wie hier umgebettet wurde. I soll hier im folgendem für einen Modulorest stehen, der durch den Ultrafilter erzeugt wird.
Bezeichne hier die Räume in (41) von links nach rechts mit $(r1)$,...,$(r5)$. Sei $u \in (r1)$ und nimm an, u ist in $(r2)$ ein Elementartensor $q \otimes f$. Geht man von $(r2)$ nach $(r3)$, so ändert sich nur q, also $q = \oplus e_i^* + I$. u nimmt also in $(r4)$ die Form $\oplus(e_i^* \otimes f) + I$ an. Bzw. $u = \oplus u_i + I$ in $(r5)$ mit $e_i^* \otimes f = u_i \in cb(E_i, F)$. Damit ist

$$u(\oplus e_i + I) = q(\oplus e_i + I)\, f = (\lim_{\mathcal{U}} \mathrm{e}_i^*(e_i))\, f = (\lim_{\mathcal{U}} \mathrm{e}_i^*(e_i) f) = \lim_{\mathcal{U}} u_i(e_i) \tag{42}$$

Schreibt man gemäß 7.7.(ii) $F = \oplus F/\mathcal{U}$, so ergibt sich aus (42), dass u gerade $\oplus u_i/\mathcal{U}$ ist. Es lässt sich also 7.7.(i) anwenden:

$$\|u\|_n = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_n \;\forall n \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \|u\|_{cb} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_{cb} = \|u\|_{(r5)}\,. \tag{43}$$

Ganz analog lässt sich durchrechnen, dass

$$cb(F, \oplus E_i/\mathcal{U}) \approx \oplus cb(F, E_i)/\mathcal{U} \qquad \text{vollständig isomorph}\,, \tag{44}$$

wobei jedem $v \in cb(F, \oplus E_i/\mathcal{U})$ ein $\oplus v_i + I$ im rechten Raum entspricht mit

$$v(f) = \oplus v_i(f) + I \tag{45}$$

und

$$\|v\|_n = \lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_n \;\forall n \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \|v\|_{cb} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_{cb}\,. \tag{46}$$

Wir fassen die erhaltenen Resultate noch einmal in einem Lemma zusammen.

Lemma 7.9

(i) Seien E_i, F endlichdim. Operatorräume von gleicher Dimension. Dann sind die Abbildungen

$$\oplus_i cb(E_i, F)/\mathcal{U} \to cb(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, F) \quad \textit{und} \quad \oplus_i\, cb(F, E_i)/\mathcal{U} \to cb(F, \oplus_i E_i/\mathcal{U})\,, \tag{47}$$

vermöge $\oplus u_i + I \mapsto \oplus u_i/\mathcal{U}$, vollständig kontraktive Isomorphismen.

(ii) Sei $u \in cb(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, F)$ invertierbar und seien $u \equiv \oplus u_i + I \in \oplus_i cb(E_i, F)/\mathcal{U}$, $u^{-1} \equiv \oplus v_i + I \in \oplus_i cb(F, E_i)/\mathcal{U}$ gemäß (47), dann sind fast alle u_i und v_i invertierbar (d.h. $\forall i \in w$ für ein $w \in \mathcal{U}$) und es gilt in $\oplus cb(F, E_i)/\mathcal{U}$

$$\oplus u_i^{-1} + I = \oplus v_i + I\,.$$

Beweis 38

(i) wurde schon oben gezeigt.

(ii) Die Voraussetzung besagt, dass $u \equiv \oplus u_i/\mathcal{U}$ entspricht, d.h. $u(\oplus e_i + I) = u_i(e_i) + I$, wobei wir uns F in der Form $\oplus F/\mathcal{U}$ denken. Analog ist $u^{-1}(\oplus f_i + I) = \oplus v_i(f_i) + I$. Damit ergibt $u^{-1} \circ u$ punktweise

$$\oplus e_i + I = v_i u_i(e_i) + I\,.$$

D.h. $\lim_{\mathcal{U}} \|v_i u_i(e_i) - id(e_i)\|_{E_i} = 0$. Wählt man die e_i mit $\|e_i\| = 1$ speziell so, dass $\|v_i u_i - id\|_{B(E_i,E_i)} = \|v_i u_i(e_i) - id(e_i)\|_{E_i}$, dann erhält man also, dass $\lim_{\mathcal{U}} \|v_i u_i - id\|_{B(E_i,E_i)} = 0$. D.h. $\exists w \in \mathcal{U}$, sodass $\|v_i u_i - id\| \leq \varepsilon < 1\ \forall i \in w$. D.h. alle diese $v_i u_i$ sind invertierbar und sowohl $\|v_i u_i\|$ als auch $\|(v_i u_i)^{-1}\|$ gleichmäßig beschränkt durch eine (von ε abhängigen) Konstante. Analog erhält man, dass $\lim_{\mathcal{U}} \|u_i v_i - id\|_{B(F,F)} = 0$ und dass $u_i v_i$ für fast alle i invertierbar ist. Damit sind nun aber u_i und v_i selbst invertierbar für fast alle i. Zudem ist damit $\|u_i^{-1}\| \leq \|u_i^{-1} v_i^{-1}\|\,\|v_i\| \leq C$ für fast alle i und für eine Konstante C. Damit ergibt sich das Resultat (siehe 2.9.(i))

$$\lim_{\mathcal{U}} \|u_i^{-1} - v_i\|_{cb} \leq n \lim_{\mathcal{U}} \|u_i^{-1} - v_i\| \leq n \lim_{\mathcal{U}} \|u_i^{-1}\|\,\|id - u_i v_i\| = 0\,.$$

□

8 Das maximale Tensorprodukt

Ich zitiere die Sätze von Stinespring und Arveson.

Satz 8.1 (Stinespring)

Sei A eine C^*-Algebra

*(i) Sei $u : A \to B(h)$ vollständig positiv. Dann gibt es einen Hilbertraum $H \supseteq h$ und einen *-homomorphismus $\pi : A \to B(H)$ und ein $V \in B(H)$, sodass für alle $a \in A$ gilt*

$$u(a) = V^* \pi(a) V\,. \tag{48}$$

*(ii) Sei umgekehrt B eine C^*-Algebra und $\pi : A \to B$ ein *-homomorphismus und sei $u : A \to B$ eine Abbildung von der Form (48) mit festem $V \in B$. Dann ist u vollständig positiv.*

Satz 8.2 (Arvesons Erweiterungssatz)

Sei A eine unitale C^*-Algebra und X ein Operatorsystem in A, d.h. $X \subseteq A$ ein lin. Teilraum, X selbstadjungiert und $1_A \in X$. Sei h Hilbert und $u : X \to B(h)$ vollständig positiv. Dann gibt es eine vollständig positive Abbildung $\tilde{u} : A \to B(h)$, die u erweitert.

Sei A eine C^*-Algebra. So kann man bekanntlich eine Einheit adjungieren und erhält eine C^*-Algebra $\tilde{A} \supseteq A$. Die Bezeichnung $\tilde{A}$ hat sich eingebürgert.

Proposition 8.3
*Seien A, B, C C^*-Algebren und $\pi : A \to C$ ein *-homomorphismus. Dann gelten*
(i) $A \otimes_{max} B \subseteq \tilde{A} \otimes_{max} \tilde{B}$.
(ii) $\pi \otimes id : A \otimes_{max} B \to C \otimes_{max} B$ *ist eine Kontraktion.*

Beweis 39
(i) o.B. siehe Vowden.
(ii) Es ist mit (i) $C \otimes_{max} B \subseteq \tilde{C} \otimes_{max} \tilde{B}$, sodass

$$\| \sum \pi(a_k) \otimes id(b_k) \|_{C \otimes_{max} B} = \| \sum (\pi(a_k) \otimes 1)\,(1 \otimes id(b_k)) \|_{\tilde{C} \otimes_{max} \tilde{B}} \leq \| \sum a_k \otimes b_k \|_{A \otimes_{max} B} .$$

Letzte Unlgeichung gilt, da $a \mapsto \pi(a) \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes id(b)$ ein kommutierendes Paar von *-homomorphismen sind und sich ja die Norm von $A \otimes_{max} B$ errechnet durch das Supremum über alle solche Paare (siehe etwa [L]). □

Proposition 8.4
Seien A_1, A_2, B_1, B_2 C^*-Algebren und $u : A_1 \to B_1$ und $v : A_2 \to B_2$ vollständig positiv. Dann ist $u \otimes v : A_1 \otimes_{max} A_2 \to B_1 \otimes_{max} B_2$ vollständig positiv mit

$$\|u \otimes v\|_{cb(A_1 \otimes_{max} A_2, B_1 \otimes_{max} B_2)} = \|u\|_{cb} \|v\|_{cb} .$$

Für einen Beweis siehe etwa [W2, Proposition 1.11].

Lemma 8.5
Seien $h_1 \subseteq H_1$, $h_2 \subseteq H_2$ Hilberträume. Dann gilt

$$B(h_1) \otimes_{max} B(h_2) \subseteq B(H_1) \otimes_{max} B(H_2) .$$

Beweis 40
Seien $A := B(h_1) \otimes_{max} B(h_2)$, $B := B(H_1) \otimes_{max} B(H_2)$. Sicherlich ist $id \otimes id : A \to B$ eine Kontraktion, da B eine C^*-Norm auf $B(h_1) \otimes B(h_2)$ definiert, die kleiner gleich der maximalen sein muss. Umgekehrt betrachte die Projektion $u_1 : B(H_1) \to B(h_1) : \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \mapsto T_{11}$. u_1 ist vollständig positiv: das ergibt sich leicht aus folgendem Lemma: für eine C^*-Algebra C sind die positiven Elemente in $M_n(C)$ genau die, die Summe von Elementen der Form $[x_i^* x_j]_{1 \leq i,j \leq n}$ ($x_i \in C$) sind (siehe etwa [L, Prop. 3.1.1]). Zudem ist $\|u_1\|_{cb} = 1$: Denn $M_n \otimes B(H_1)$ können wir schreiben als $(2n) \times (2n)$ Matrix. Die Abbildung $id_n \otimes u_1 : M_n \otimes B(H_1) \to M_n \otimes B(h_1) \subseteq M_n \otimes B(H_1)$ macht dann nichts anderes, als jede zweite Spalte und jede zweite Zeile 0 zu setzen. Aber eine Spalte oder Zeile in einer Matrix 0 zu setzen ist eine Kontraktion, also $\|u\|_{cb} \leq 1$. Analog erhält man eine vollst. positive Kontraktion $u_2 : B(H_2) \to B(h_2)$. Gemäß 8.4 ist $u_1 \otimes u_2 : B \to A$ vollständig positive Kontraktion und damit eine Kontraktion. □

Definition 8.6
Seien $E \subseteq B(h)$ und $F \subseteq B(k)$ Operatorräume. Dann sei

$$E \otimes_M F \tag{49}$$

der Operatorraum, der durch Abschluss des algebraischen Tensorproduktes $E \otimes F$ in $B(h) \otimes_{max} B(k)$ entsteht.

Diese Definition stammt von [JP]. Dass sie nur von der Operatorraumstruktur von E und F abhängt, zeigt etwa das Lemma [JP, Lemma 4.1].

Eine Bezeichnung "$E \otimes_{max} F$" für (49) wäre sehr schlecht, denn wenn E, F C^* -Algebren sind, so braucht (49) nicht mit dem maximalen Tensorprodukt von C^*-Algebren $E \otimes_{max} F$ übereinzustimmen.

Ich zeige jetzt [JP, Lemma 4.1], wobei der folgende Beweis um einiges einfacher ist.

Proposition 8.7
Seien E_1, E_2, F_1, F_2 Operatorräume.
(i)Seien $u : E_1 \to F_1$ und $v : E_2 \to F_2$ vollständig beschränkt. Dann gilt

$$\|u \otimes v\|_{cb(E_1 \otimes_M E_2, F_1 \otimes_M F_2)} \leq \|u\|_{cb}\|v\|_{cb} \quad .$$

(ii) Sind $E_1 = F_1$, $E_2 = F_2$, so ist $E_1 \otimes_M E_2 = F_1 \otimes_M F_2$ als Operatorräume.

Beweis 41
Wegen 8.5 lässt sich der Beweis von 2.4.(i) fast wörtlich übernehmen, man ersetzt nur die dort auftretenden minimalen Tensorprodukte durch das maximale Tensorprodukt.
Also seien $E_1 \subseteq B(h_1)$ und $E_2 \subseteq B(h_2)$. Dann ist per Definition

$$E_1 \otimes_M E_2 \subseteq B(h_1) \otimes_{max} B(h_2) \subseteq B(h_1 \oplus h_2) \otimes_{max} B(h_1 \oplus h_2)\,.$$

Letztere Inklusion gilt wegen 8.5. Und so weiter spule den Beweis von 2.4.(i) ab.
Der Beweis von (ii) läuft analog zu dem von 2.4.(ii). $\square$

9 Endlichdimensionale Operatorräume

Seien E, F endlichdimensionale Operatorräume und $K = K(l^2(N))$ der Raum der kompakten Operatoren auf l^2.
Man setzt

$$d_k(E, F) = \inf\{\, \|u\|_k \|u^{-1}\|_k \mid u : E \to F \quad \text{ein linearer Isomorphismus}\} \qquad (k \geq 1)$$

$$d_{cb}(E, F) = \inf\{\, \|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \mid u : E \to F \quad \text{ein vollständiger Isomorphismus}\}$$

$$\delta_{cb}(E, F) = \log d_{cb}(E, F) \qquad \delta_k(E, F) = \log d_k(E, F)$$

$$\delta_w(E, F) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \log d_k(E, F)$$

$$d_{SK}(E) = \inf\{\, d_{cb}(E, F) \mid F \text{ ein Operatorraum} \subseteq K\}$$

Definition 9.1

OS_n sei die Menge aller endlichdimensionalen Operatorräume, wo je zwei vollständig isometrische Räume identifiziert sind.
Genauer sei $OS_n := \{ (\mathcal{C}^n;\, \alpha_1, \alpha_2, ...) \,|\, \alpha_i$ sind Normen auf $M_i(\mathcal{C}^n)$, unter denen $(\mathcal{C}^n;\, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ ein Operatorraum wird $\}/R$, wo R die die Äquivalenzrelation sei: es gilt $R(E, F) \Leftrightarrow$ es gibt eine vollständige Isometrie $E \to F$.

Zwei Operatorräume E, F mit unterschiedlichem Träger aber gleichen Vektorraumstrukturen und gleichen Matrizennormen, also genau dann wenn es eine vollständige isometrischen Isomorphismus $E \to F$ gibt, braucht man ja nicht zu unterscheiden. In obiger Definition wurde der Träger auf C^n beschränkt. Würde man wirklich alle n-dimensionalen Operatorräume zulassen, also setze etwa $X := \{ E \,|\, E \text{ ist ein } n\text{-dim. Operatorraum} \}$ und dann den Quotienten X/R bilden, so wäre das sehr problematisch, da meines Erachtens X keine Menge zu sein braucht.
So ein Repräsentant $E \in OS_n$ (bezüglich der Äquivalenzrelation R) ist also nichts anderes als ein vollständiger Satz von Matrizennorem auf C^n, die die Axiome von Ruan erfüllen.
Zwei Repräsentanten $E, F \in OS_n$ sind per Definition äquivalent genau dann, wenn es eine bijektive, lineare Abbildung $u : C^n \to C^n$ gibt, sodass

$$\|x\|_{M_k(E)} = \|u_k(x)\|_{M_k(F)} \qquad \forall k \geq 1\, \forall x \in M_k(C^n) \tag{50}$$

gilt. Bzw., wenn E ein Repräsentant in OS_n ist und $u : C^n \to C^n$ eine beliebige bijektive, lineare Abbildung ist, so definiert

$$\|x\|_{M_k(F)} := \|u_k(x)\|_{M_k(E)} \qquad \forall k \geq 1\, \forall x \in M_k(C^n) \tag{51}$$

einen Repräsentanten $F \in OS_n$, der zu E äquivalent ist. Wegen (50) sind das aber schon alle zu E äquivalenten Operatorräume bezüglich OS_n, wenn man in (51) alle u durchläuft.
Seien $\tilde{E}, \tilde{G} \in OS_n$, E bzw. G Repräsentanten von $\tilde{E}$ bzw. $\tilde{G}$ und $u : C^n \to C^n$ ein linearer Isomorphismus, so mag man $u : E \to G$ betrachten, es macht aber keinen Sinn von einer Abbildung $u : \tilde{E} \to \tilde{G}$ zu sprechen. Tatsächlich findet man für E gemäß (51) einen äquivalenten Repräsentanten E', sodass u transformiert zu $E' \to G$ zur Identität $id : E' \to G$ wird.
Im folgendem wird nicht mehr so scharf zwischen Repräsentanten von OS_n und einem tatsächlichen Element aus OS_n unterschieden. Etwa wird unten auf OS_n mit δ_{cb} eine Metrik erklärt, wobei für δ_{cb} in oben definierte Formel einzusetzen ist, was gar nicht geht. Tatsächlich sind irgendwelche Repräsentanten in die δ_{cb}-Formel einzusetzen.
(Diese unscharfe Handhabe ist ja auch etwa von den integrierbaren Funktionen bekannt, wo man etwa für eine Funktion $f : X \to C$ schreibt "$f \in L^1(X, \sigma, \mu)$".)

Lemma 9.2

Seien $E, F \in OS_v$. Dann wird das Infimum bei der Formel von $d_{cb}(E, F)$ angenommen.
(OS_v, δ_{cb}) ist ein vollständiger metrischer Raum unter der Metrik δ_{cb}.

Beweis 42

Das Infimum wird angenommen:

Sei etwa $u_n \in cb(E,F)$ eine Folge, sodass $R := d_{cb}(E,F) = lim_n \|u_n\|_{cb}\|u_n^{-1}\|_{cb}$. Wähle dabei o.B.d.A. $\|u_n\|_{cb} = 1$. Die Folge $(u_n, u_n^{-1}) \in cb(E,F) \times cb(F,E)$ liegt dabei in einer -kompakten - Kugel und es gibt eine konvergente Teilfolge $(u_{n_k}, u_{n_k}^{-1})$ mit Grenzwert (v,w). Es ist $w = v^{-1}$, da $v \circ w = \lim_k u_{n_k} \circ u_{n_k}^{-1} = id$ und genauso $w \circ v = id$. Klarerweise ist $R = \|v\|_{cb}\|w\|_{cb}$.

δ_{cb} ist eine Metrik:

Wenn $\delta_{cb}(E,F) = 0 \Rightarrow d_{cb}(E,F) = 1 \Rightarrow$ da das Infimum angenommen wird gibt es ein $u \in cb(E,F)$ mit $\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} = 1 \Rightarrow$ u ist eine vollständiger, isometrischer Isomorphismus $\Rightarrow E = F$ in OS_n. Die Symmetrie und die Dreiecksungleichung von δ_{cb} bereiten keine Schwierigkeiten.

(OS_v, δ_{cb}) ist vollständig:

Sei eine Cauchyfolge E_n bezüglich δ_{cb} in OS_n gegeben. Es gibt eine dazugehörige Folge $u_n \in cb(E_n, E_{n+1})$, sodass $d_{cb}(E_n, E_{n+1}) = \|u_n\|_{cb}\|u_n^{-1}\|_{cb} \leq 1 + \frac{1}{2^n}$. Letztere Ungleichung gelte o.B.d.A., sonst konstruiere man durch ein Standardargument eine entsprechende Teilfolge. Nehme wieder o.B.d.A. $\|u_n\|_{cb} = 1$ an. Wähle als Trägermenge der Operatorräume E_n etwa C^v, und zwar so, sodass $u_n = id_{C^v}$ für alle n. Ich verwende jetzt die Propositionen 3.2 und 3.3. Bezeichne die Normen $\|.\|_{K\otimes E_n}$, die allesamt Normen auf $K \otimes C^v$ sind, hier zur Abkürzung mit $\|.\|_n$. Ich konstruiere jetzt dann auf naheliegende Weise eine neue Norm $\|.\|$ auf $K \otimes C^v$, unter der C^v ein Operatorraum wird und gegen den die Folge E_n konvergiert. Also:

Es ist $1 = \|u_n\|_{cb} = \|id \otimes id\|_{K\otimes E_n \to K\otimes E_{n+1}}$ und

$$\|u_n^{-1}\|_{cb} = \|u_n\|_{cb}\|u_n^{-1}\|_{cb} = d_{cb}(E_n, E_{n+1}) \leq 1 + \frac{1}{2^n}\,.$$

Damit gilt für alle $x \in K \otimes C^v$

$$\|x\|_{n+1} = \|(id \otimes u_n)(x)\|_{n+1} \leq \|x\|_n = \|(id \otimes u_n^{-1})(id \otimes u_n)(x)\|_n \leq (1 + \frac{1}{2^n})\|x\|_{n+1}\,,$$

bzw. $0 \leq \|x\|_n - \|x\|_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}\|x\|_{n+1}$, womit durch ein Standardargument gilt: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \geq 1$, sodass

$$|\|x\|_m - \|x\|_n| \leq \varepsilon\|x\|_n \qquad \forall n,m \geq N \;\; \forall x \in K \otimes C^v\,. \tag{52}$$

Setze nun $\|x\| := \lim_n \|x\|_n$ für alle $x \in K \otimes C^v$. $\|.\|$ ist trivialerweise eine Halbnorm, da $\|.\|_n$ allesamt Normen sind. Aus (52) folgt durch Limesbildung $n \to \infty$, dass

$$|\|x\|_m - \|x\|| \leq \varepsilon\|x\| \qquad \forall m \geq N \;\; \forall x \in K \otimes C^v \tag{53}$$

womit für $\|x\| = 0$, $x = 0$. Trivialerweise erfüllt $\|.\|$ die Axiome (R_1) und (R_2) von Ruan, da selbiges für alle $\|.\|_n$ gilt.

Sei E der durch $\|.\|$ gewonnene Operatorraum. Nun gilt

$$d_{cb}(E_n, E) \leq \|id\|_{cb(E_n,E)}\|id\|_{cb(E,E_n)} = (\sup_{\|x\|_n \leq 1} \|x\|)(\sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|_n) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|_n \tag{54}$$

und das ist mit (53) für $n \geq N$ kleiner gleich als

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|x\|_n - \|x\| + \|x\| \leq \varepsilon + 1\,.$$

Also $\delta(E_n, E) \to 0$. □

Folgendes Lemma wird in [JP] behauptet.

Lemma 9.3
Seien $E, F \in OS_n$. Dann gilt $d_{cb}(E,F) = \sup_{k\geq 1} d_k(E,F)$.

Beweis 43
Seien $B(E,F)$ die linearen Abbildungen von $E \to F$ und X deren Einheitskugel bezüglich irgendeiner Norm auf $B(E,F)$. X ist kompakt. Sei $S \subseteq X$ die Menge der Isomorphismen in X. Bei der Infimumsbildung von

$$f(u,k) := \|u\|_k \|u^{-1}\|_k \quad (k \geq 1)$$

über alle Isomorphismen u in der d_k-Formel kann man sich auf S beschränken, da eine Skalierung nichts ändert. Das Gleiche gilt für die d_{cb}-Formel. Aus der Theorie der Banachalgebren folgt, dass die Inversion $u \mapsto u^{-1}$ stetig ist in $B(E,F)$, womit $\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb}$ stetig ist auf $u \in S$. Es ergeben sich folgende Rechnungen.
Sei $M_k := \inf\{\, \|u\|_k \,|\, u : E \to F,\, \|u\|_{cb} = 1\,\}$. Sicher ist $M_k \leq 1$ und monoton steigend in k. Wir zeigen $\lim_k M_k = 1$. Für jedes k gibt es ein $u_k \in B(E,F)$ mit $\|u_k\|_k \approx M_k$. Da die Einheitskugel bez. der cb-Norm kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge u_{k_s} mit Grenzwert u, wo $\|u\|_{cb} = 1$. Also

$$|M_{k_s} - 1| \leq |M_{k_s} - \|u_{k_s}\|_{k_s}| + |\,\|u_{k_s}\|_{k_s} - \|u\|_{k_s}| + |\,\|u\|_{k_s} - \|u\|_{cb}| \leq \varepsilon + \|u_{k_s} - u\|_{k_s} + \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon + \|u_{k_s} - u\|_{cb} \leq 3\varepsilon \quad \forall s \geq s_0\,.$$

Wir erhalten aus Homogenitätsgründen, dass $\|u\|_k \geq M_k \|u\|_{cb}$ für alle $k \geq 1$ und alle $u \in B(E,F)$ gilt. Eine analoge Rechnung kann man für die $u \in B(F,E)$ durchführen.
Nun gilt für beliebige $u \in S$, $s \geq 1$:
$\sup_k f(u,k) = f(u,s) + \sup_k f(u,k) - f(u,s) = f(u,s) + \|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} - \|u\|_s\|u^{-1}\|_s \leq f(u,s) + \|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} - M_s^2\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} = f(u,s) + (1 - M_s^2)\,\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} \leq f(u,s) + (1 - M_s^2)\alpha$, weil aus Stetigkeits-Kompaktheits-Gründen ein Maximum α angenommen wird. Man erhält also $\sup_k f(u,k) \leq f(u,s) + \varepsilon$ für alle $s \geq s_0$ und für alle $u \in S$. Damit ist
$d_{cb}(E,F) = \inf_{u\in S} \sup_{k\geq 1}\, f(u,k) \leq \inf_u\, f(u,s) + \varepsilon \leq \sup_s \inf_u\, f(u,s) + \varepsilon = \sup_s d_s(E,F) + \varepsilon$.
Die umgekehrte Ungleichung für die Infimums-Supremums-Vertauschung gilt für beliebige Funktionen f und ist trivial. □

In [JP] wird behauptet:

Proposition 9.4

Sei E_i eine Folge in OS_n und E in OS_n. Dann sind äquivalent

(i) $\delta_w(E_i, E) \to 0$ für $i \to \infty$

(ii) $\delta_k(E_i, E) \to 0$ für $i \to \infty$ für alle $k \geq 1$.

(iii) Für jeden nichttrivialen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf N gilt, dass $\oplus_i E_i/\mathcal{U} = E$ vollständig isometrisch.

Beweis 44

(i) $\Rightarrow$ (ii). Für festes $N \geq 1$ gilt, dass $\delta_N(E_i, E) \leq 2^N \sum_k \frac{1}{2^k}\delta_k(E_i, E) \to 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei $\mathcal{U}$ wie in (iii). Sei $k \geq 1$ fest. Dann gibt es wegen (ii) ein $i_0 \geq 1$, sodass $d_k(E_i, E) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$. D.h. es gibt $u_i : E_i \to E$ mit $\|u_i\|_k\|u_i^{-1}\|_k \leq 1 + \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$. Die u_i erzeugen gemäß 7.7.(i) und 7.7.(ii) eine bijektive (da $\oplus u_i^{-1}/\mathcal{U}$ sie umkehrt) Abbildung

$$u : \oplus_i E_i/\mathcal{U} \to \oplus_i E/\mathcal{U} = E$$

mit $\|u\|_k = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_k$. Also ist ist $d_k(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, E) \leq \|u\|_k\|u^{-1}\|_k = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_k\|u_i^{-1}\| \leq 1+\varepsilon$. Da ε und k beliebig sind, folgt mit 9.3 $\delta_{cb}(\oplus_i E_i/\mathcal{U}, E) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Gelte also, es gibt ein $u \in cb(\oplus E_i/\mathcal{U}, E)$ mit $\|u\|_{cb} = \|u^{-1}\|_{cb} = 1$. Wir fassen E in der Form $\oplus_i E/\mathcal{U}$ auf und erhalten gemäß 7.9.(i) $u_i \in cb(E_i, E)$, sodass $u = \oplus_i u_i/\mathcal{U}$. Wegen 7.9.(ii) sind (fast alle, beachte dazu auch (31)) die u_i^{-1} invertierbar und es ist $u^{-1} = \oplus_i u_i^{-1}/\mathcal{U}$. Wegen 7.7.(i) ist $\|u\|_k = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_k$. Damit erhalten wir

$$\lim_{i\to\infty} d_k(E_i, E) \leq \lim_i \|u_i\|_k \, \|u_i^{-1}\|_k = \lim_{\mathcal{U}} \|u\|_k \, \|u^{-1}\|_k = 1\,.$$

Beachte bei der letzten Gleichung, dass nach Voraussetzung $\mathcal{U}$ nicht trivial ist und damit der Limes gegen ∞ der konvergenten Folge mit dem $\mathcal{U}$-Limes übereinstimmt.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Allgemein gilt die Abschätzung $\|u\|_k \leq k\|u\|_1$, sodass offensichtlich $\delta_k(E, F) \leq \log(k^2) + \delta_1(E, F)$ für beliebige $E, F \in OS_n$. Sei $N \geq 1$. Sei $\delta_N(E, E_i) \leq \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$, sodass folgende Abschätzung gelingt: $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k}\delta_k(E, E_i) \leq \sum_{k>N} \frac{1}{2^k}[\log(k^2)+\delta_1(E, E_i)]+\varepsilon \leq 3\varepsilon$ für alle $i \geq i_0$, wenn N genügend groß ist. □

Lemma 9.5

(i) Sei X der Raum aller n-dimensionalen, normierten Räume, wo je zwei isometrische Räume identifiziert werden. Dann definiert

$$d(E, F) := \log \inf \{\|u\|\|u^{-1}\| \mid u : E \to F \text{ ein isomorphismus } \} \qquad E, F \in X$$

eine Metrik auf X, unter der X kompakt ist.

(ii) Seien $n \geq 1, k \geq 1$ fest. Sei $OS_{n,k}$ die Menge aller n-dimensionalen Vektorräume E, die mit einer Norm auf $M_k(E)$ ausgestattet sind, die die Axiome von Ruan erfüllt (bis zur k-ten Stufe), wobei zwei Elemente E und $F \in OS_{n,k}$ identifiziert werden, falls $\delta_k(E, F) = 0$. Dann definiert δ_k eine Metrik auf $OS_{n,k}$ unter der $OS_{n,k}$ kompakt ist.

Beweis 45

(i) Denn Beweis, dass d eine Metrik ist, führe man wie den Beweis, dass d_{cb} eine Metrik auf OS_n ist.

Sei nun eine Folge E_i in X gegeben. Als Trägermenge der E_i wähle etwa wieder C^n. Die Normen darauf bezeichne mit $\|.\|_i$. Eine Transformation der Norm $\|.\|_i$ mit einem Isomorphismus $u : C^n \to C^n$ ändert den Raum E_i bezüglich der Metrik d nicht. Also kann man mit 2.7.(ii) o.B.d.A.

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_i \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad \forall x \in C^n \ \forall i \geq 1 \tag{55}$$

annehmen. Sei S die Einheitskugel in C^n bezüglich $\|.\|_\infty$. Die Normen $\|.\|_i$ bilden eine Funktionenfolge auf S, die die Vorausetzungen des wohlbekannten Satzes von Ascoli-Arzela bezüglich der Metrik $\|.\|_\infty$ erfüllen.

$$\sup_i \sup_{x \in S} | \, \|x\|_i \, | \leq n < \infty$$

und

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{i \geq 1, \|x-y\|_\infty \leq \delta} | \, \|x\|_i - \|y\|_i \, | \to 0 \, .$$

Nach dem Satz von Ascoli-Arzela ist also $\|.\|_i$ eine relativ kompakte Folge in $C(S)$. D.h. es gibt eine konvergente Teilfolge $\|.\|_{i_k}$, die gegen ein $f \in C(S)$ bezüglich der Supnorm konvergiert. D.h.

$$\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} | \, \|x\|_{i_k} - f(x) \, | \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty \tag{56}$$

Insbesondere ist f punktweiser Limes der Folge $\|.\|_{i_k}$ auf S und damit eine Halbnorm auf S bzw. gleich auf C^n, wenn man f homogen ausdehnt. Aus Homogenitätsgründen folgt aus (56), für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \geq 1$, sodass

$$| \, \|x\|_{i_k} - f(x) \, | \leq \varepsilon \|x\|_\infty \leq \varepsilon \|x\|_{i_k} \qquad \forall x \in C^n \ \forall k \geq N \tag{57}$$

Nimmt man hier $f(x) = 0$ an und wählt ε genügend klein, so folgt $x = 0$, womit f eine Norm ist. Damit folgt aus der Äquivalenz der Normen f und $\|.\|_\infty$ aus (57)

$$| \, \|x\|_{i_k} - f(x) \, | \leq \varepsilon f(x) \qquad \forall x \in C^n \ \forall k \geq N \, . \tag{58}$$

Setzt man nun E gleich C^n mit der Norm f ausgestattet, so konvergiert E_{i_k} gegen E. Führe dazu mithilfe von (57) und (58) einen völlig analogen Beweis wie in 9.2 ab (54).

(ii) Der Beweis wird völlig analog zum Beweis (i) geführt. Der einzige Problempunkt ist (55), da man jetzt nicht alle Isomorphismen zur Verfügung hat, die Normen äquivalent umzuschreiben, sondern nur solche der Form $id \otimes u : M_k \otimes C^n \to M_k \otimes C^n$. Sei ein E mit einer Matrixnorm $\|.\|$ auf $M_k(E)$ gegeben. Finde gemäß 2.7.(ii) ein $u : C^n \to C^n$, sodass

$$\|x\|_\infty \leq \|u(x)\| \leq \|x\|_1 \qquad \forall x \in C^n$$

Damit ist für jedes $M_n \otimes C^n \ni z = (z_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} = (z_{ijv})_{1 \leq i,j \leq k \ 1 \leq v \leq n}$

$$\|z\|_\infty = \max_{i,j,v} |z_{ijv}| \leq \max_{i,j} \|u(z_{ij})\| \leq \|(id \otimes u)(z)\|$$

$$\leq k^2 \max_{ij} \|u(z_{ij})\| \leq k^2 \max_{ij} \|z_{ij}\|_1 \leq k^2 n \max_{ijv} |z_{ijv}| = k^2 n \|z\|_\infty$$

D.h. man hat jetzt eine analoge Abschätzung wie in (55) und vollende den Beweis wie in (i). Dass die gefunde Norm f auch die AXIOME (R_1') und (R_2') erfüllt, ist trivial, da f wieder punktweiser Limes von diesen Axiomen erfüllenden Normen ist. □

Proposition 9.6

(OS_n, δ_w) ist ein vollständiger, kompakter, metrischer Raum unter der Metrik δ_w.

Beweis 46

δ_w ist eine Metrik:

Seien $E, F \in OS_n$. Sei $\delta_w(E, F) = 0$. Dann ist $\delta_k(E, F) = 0$ für alle $k \geq 1$. Also ist mit 9.3 $d_{cb}(E, F) = \sup_k d_k(E, F) = 0$, also $E = F$ in OS_n.

Kompaktheit:

Sei E_i eine Folge in OS_n. Sei $k \geq 1$ fest. Stattet man E_i nur mit der Matrizennorm auf $M_k(E_i)$ aus, und bezeichnet diesen Raum mit $E_i^{(k)}$, so mag man diesen Raum als Element in $OS_{n,k}$ - siehe 9.5.(ii) - auffassen: also $E_i^{(k)} \in OS_{n,k}$. Damit bildet $z_i := \prod_{k\geq 1} E_i^{(k)}$ eine Folge im kompakten Raum $X := \prod_{k\geq 1} OS_{n,k}$. Also hat $(z_i)_i$ eine konvergente Teilfolge. Zur besseren Lesbarkeit wollen wir Indizes sparen und nehmen an, dass (z_i) schon selbst konvergiert. Sei $F := \prod_{k\geq 1} F_k$ der Grenzwert in X. Also $\lim_i z_i = F$ in X und damit $\lim_i E_i^{(k)} = F_k$ in $OS_{n,k}$ für alle $k \geq 1$, also $\lim_i \delta_k(E_i, F_k) = 0$ für alle k.

Wir konstruieren jetzt den gesuchten Operatorraum $Y \in OS_n$ induktiv wie folgt: Sei nun $X := C^n$. Beachte, dass für festes k F_k für eine ganze Klasse von Normen auf $M_k(X)$ steht, die bezüglich $(OS_{n,k}, \delta_k)$ äquivalent sind. Definiere eine Norm α_1 auf X durch irgendeine Norm aus F_1. Seien nun schon auf X Matrizennormen $\alpha_1, ..., \alpha_k$ auf $M_1(X), ..., M_k(X)$ definiert, die die Axiome von Ruan erfüllen (bis zur k-ten Stufe), wobei für alle $1 \leq s \leq k$ die Norm α_s durch eine Norm aus F_s induziert ist.

Sei F'_{k+1} die Einschränkung der M_{k+1}-Matrizennorm von F_{k+1} auf die kleinere Matrix $M_k \otimes X$, also $F'_{k+1} \in OS_{n,k}$. Dann ist

$$\delta_k(F'_{k+1}, F_k) \leq \delta_k(F'_{k+1}, E_i^{(k)}) + \delta_k(E_i^{(k)}, F_k) \leq \delta_{k+1}(F_{k+1}, E_i^{(k+1)}) + \delta_k(E_i^{(k)}, F_k) \leq 2\varepsilon\,.$$

(Erinnere, wie $E_i^{(k)}$ und $E_i^{(k+1)}$ definiert sind; die Normen aus $E_i^{(k)}$ sind die Einschränkungen der Normen aus $E_i^{(k+1)}$.) ε kann man natürlich beliebig klein machen, sodass $\delta_k(F'_{k+1}, F_k) = 0$. D.h. es gibt eine Isometrie $id_k \otimes u : M_k(F_k) \to M_k(F_{k+1})$. D.h. man kann F_{k+1} äquivalent um $id_{k+1} \otimes u$ transformieren und erhält eine Norm α_{k+1} auf $M_{k+1}(X)$, die die Norm α_k fortsetzt. Da α_{k+1} punktweiser Limes von Normen aus $E_i^{(k+1)}$ ist, erfüllt α_{k+1} AXIOM R'_1 und $(x \in M_s(X), y \in M_t(y))$

$$\alpha_{k+1}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \leq \max(\alpha_{k+1}(x), \alpha_{k+1}(y)) = \max(\alpha_s(x), \alpha_t(x))\,,$$

also AXIOM R_2'.
Damit ist ein Operatorraum $Y := (X, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ konstruiert mit

$$\lim_i \delta_k(E_i, Y) = \lim_i \delta_k(E_i^{(k)}, F_k) = 0 \qquad \forall k \geq 1\,.$$

Wegen 9.4 konvergiert damit E_i gegen Y in der δ_w-Metrik. $\square$

Wir benötigen im letzten Kapitel noch folgendes Lemma von [JP]. (Bem: die Aussage in [JP] sagt mehr aus.)

Lemma 9.7 (JP, Proposition 2.2)
Sei $E \in OS_n$. Sei $f : (OS_n, \delta_w) \to (OS_n, \delta_{cb})$ die identische Abbildung. Dann gilt: Ist f stetig in E, so ist f stetig in E^* und

$$d_{SK}(E) = d_{SK}(E^*) = 1\,.$$

Beweis 47
Sei $\sigma_m : E \to M_m : \sigma_m(e) := P_m e P_m$, wo P_m die übliche Projektion ist. Sei $E_m := \sigma_m(E) \subsetneq M_m$. Beachte nun 3.1.(ii). Gemäß dieser Aussage ist

$$\|z\|_{E\otimes M_n} = \lim_{m\geq 1} \|(\sigma_m \otimes id)(z)\|_{M_m \otimes M_n}\,.$$

Da die Einheitskugel S von $E \otimes M_n$ kompakt ist, kann man sich endlich viele $z_i \in S$ wählen, sodass

$$\|z\| \approx \|z_i\| \approx \|(\sigma_m \otimes id)(z_i)\| \approx \|(\sigma_m \otimes id)(z)\| \qquad \forall m \geq m_0 \, \forall z \in S\,.$$

D.h., $\|\sigma_m\|_n \|\sigma_m^{-1}\|_n \approx 1$ für alle $m \geq m_0$. D.h. $d_n(E_m, E) \to 1$ für $m \to \infty$. Da dies für alle n gilt, erhält man $\delta_w(E_m, E) \to 0$ mit 9.4.
Nun ist nach Voraussetzung f stetig in E, d.h. $\delta_{cb}(E_m, E) \to 0$. Damit ist

$$d_{SK}(E) \leq d_{cb}(E, E_m)\, d_{SK}(E_m) = d_{cb}(E, E_m)\,, \tag{59}$$

für alle m und damit $d_{SK}(E) \leq \lim_m d_{cb}(E, E_m) = 1$.
f ist stetig in E^*: Beachte, dass E reflexiv ist und damit reflexiv als Operatorräume wegen 4.3. Sei $\lim_i \delta_w(E_i, E^*) = 0$. Dann ist $d_k(E_i^*, E) = d_k(E_i, E^*) \to 0$ für alle k wegen 4.6.(iii). Damit ist $\delta_w(E_i^*, E) \to 0$ und also, da f stetig in E, $0 = d_{cb}(E_i^*, E) = d_{cb}(E_i, E^*)$. Letzte Gleichheit wegen 4.4.(i). Also f stetig in E^* und man kann die ganze obige Rechnung mit E^* durchführen und erhält $d_{SK}(E^*) = 1$. $\square$

10 Exaktheit

Definition 10.1
*Sei D eine C^*-Algebra. Dann heißt D exakt, wenn für alle C^*-Algebren A und alle abgeschlossenen Ideale I in A der *-homomorphismus*

$$\pi \otimes id : A \otimes_{min} D \to (A/I) \otimes_{min} D$$

den kern $= I \otimes_{min} D$ *hat. (π sei die Quotientenabbildung.)*

Sei nun D nicht notwendig exakt. Dann ist $\pi \otimes id$ sicher surjektiv und sicher liegt $I \otimes_{min} D$ im Kern. Es gibt also einen surjektiven *-homomorphismus

$$(A \otimes_{min} D)/(I \otimes_{min} D) \to (A/I) \otimes_{min} D. \tag{60}$$

Dh. D ist genau dann exakt, wenn diese Abbildung bijektiv ist für alle C^*-Algebren A und alle Ideale I in A.

Lemma 10.2

Seien E, F Operatorräume und $F_0 \subseteq F$ ein Teiloperatorraum. Dann gelten:
(i) $F \otimes E \cap F_0 \otimes_{min} E = F_0 \otimes F$.
(ii) $(F \otimes E)/(F_0 \otimes E) \subseteq (F \otimes_{min} E)/(F_0 \otimes_{min} E)$ als Vektorräume.

Beweis 48

Betrachte die (natürliche) vollständige Kontraktion $\Phi : F \otimes_{min} E \to (F/F_0) \otimes_{min} E$. Sicherlich liegt $F_0 \otimes_{min} E$ im Kern von Φ. Man erhält also eine Abbildung

$$\tilde{\Phi} : X := (F \otimes_{min} E)/(F_0 \otimes_{min} E) \to (F/F_0) \otimes_{min} E\,.$$

Sei nun $z := \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes e_k \in F \otimes E \cap F_0 \otimes_{min} E$ mit $f_k \in F$ und $e_k \in E$, wobei die e_k linear unabhängig seien. Dann ist $z + F_0 \otimes_{min} E = 0$ in X. Also ist $0 = \tilde{\Phi}(z + F_0 \otimes_{min} E) = \sum_k (f_k + F_0) \otimes e_k$. Da die e_k lin. unabh. sind, sind alle $f_k + F_0 = 0$, also $f_k \in F_0$ für alle k, w.z.z.w.

(ii) Die Einbettung sieht so aus: $z + F_0 \otimes E \mapsto z + F_0 \otimes_{min} E$ mit $z \in F \otimes E$. Die ist sicher wohldefiniert und wegen (i) ist sie injektiv: $z + F_0 \otimes_{min} E = 0$ für ein $z \in F \otimes E$ $\Rightarrow z \in F_0 \otimes_{min} E$. Mit (i) ist damit aber $z \in F_0 \otimes E$. □

Proposition 10.3

Sei D eine nukleare C^*-Algebra. Dann ist D exakt.

Beweis 49

Sei A eine C^*-Algebra und I ein abgeschlossenes Ideal in A. So gilt algebraisch wegen 10.2.(ii)

$$(A/I) \otimes D = (A \otimes D)/(I \otimes D) \subseteq (A \otimes_{min} D)/(I \otimes_{min} D)$$

Da es auf $(A/I) \otimes D$ nur eine C^*-Norm gibt, gilt als C^*-Algebren

$$(A/I) \otimes_{min} D \subseteq (A \otimes_{min} D)/(I \otimes_{min} D)$$

und ist genau die Umkehrung von (60). Also ist die Abbildung (60) injektiv. □

Definition 10.4

Sei E ein Operatorraum. Dann heißt E exakt, wenn für alle C^*-Algebren A und alle 2-seitigen, abgeschlossenen Ideale I in A die Abbildung

$$\pi \otimes id : A \otimes_{min} E \to (A/I) \otimes_{min} E \tag{61}$$

surjektiv ist und den Kern $I \otimes_{min} E$ hat. (π ist die Quotientenabbildung).

Sei E nun nicht notwendig exakt. Sicherlich ist $\pi \otimes id$ vollständig beschränkt. Und sicherlich ist $I \otimes_{min} E \subseteq ker(\pi \otimes id)$. Es gibt also eine vollständig beschränkte Abbildung T_E,

$$T_E : (A \otimes_{min} E)/(I \otimes_{min} E) \to (A/I) \otimes_{min} E\,. \tag{62}$$

Per Definition ist E exakt genau dann, wenn T_E bijektiv ist.
Im Gegensatz zum Fall, wo E eine C^*-Algebra ist, ist hier $\pi \otimes id$ nicht mehr automatisch surjektiv. Genausowenig muss T_E eine Isometrie sein, wenn E exakt ist. Man erhält dann nur, dass die beiden in (62) auftretenden Räume vollständig isomorph sind:

Tatsächlich erhält man wegen der Exaktheit von E und wegen 5.5 einen (Banach) Isomorphismus

$$\Phi : K \otimes_{min} [(A \otimes_{min} E)/(I \otimes_{min} E)] = (K \otimes_{min} A \otimes_{min} E)/(K \otimes_{min} I \otimes_{min} E) \tag{63}$$

$$\to [(K \otimes_{min} A)/(K \otimes_{min} I)] \otimes_{min} E = K \otimes_{min} (A/I) \otimes_{min} E\,, \tag{64}$$

da K exakt ist, und Φ ist genau $id_K \otimes T_E$ mit T_E von (62). Also ist $\Phi^{-1} = id_K \otimes T_E^{-1}$ beschränkt und damit T_E^{-1} vollständig beschränkt.

Wir wollen nun einen anderen Test vorlegen, ob die Abbildung T_E in (62) bijektiv ist. Betrachte dazu die Einschränkung von T_E auf den Teilraum

$$(A \otimes E)/(I \otimes_{min} E) := \{\, z + I \otimes_{min} E \,|\, z \in A \otimes E \,\}\,.$$

Bezeichne die so eingeschränkte Funktion T_E mit Φ, wobei wir den Wertebersich auch gleich einschränken, also

$$\Phi : (A \otimes E)/(I \otimes_{min} E) \to (A/I) \otimes E\,. \tag{65}$$

Sicherlich ist Φ surjektiv, aber auch injektiv: sei $\Phi(\sum_{k=1}^n a_k \otimes e_k + I \otimes_{min} E) = \sum_k (a_k + I) \otimes e_k = 0$, wo die e_k linear unabhängig gewählt seien. Dann ist $a_k \in I$ für alle k, also $\sum_k a_k \otimes e_k \in I \otimes_{min} E$. Φ bleibt mit T_E eine Kontraktion, da Φ die stetige Fortsetzung von T_E ist. Mit 1.5 ist nun T_E bijektiv genau dann, wenn Φ^{-1} beschränkt ist. Und die stetige Fortsetzung von Φ^{-1} ist T_E^{-1}. Insbesondere ist T_E auf einem dichten Teilraum immer invertierbar und wir setzen

$$\|T_E^{-1}\| := \|\Phi^{-1}\|\,, \tag{66}$$

wobei natürlich der Wert ∞ zugelassen ist. E ist also genau dann exakt, wenn für alle C^*-Algebren A und alle (abg., 2-seit.) Ideale I in A für die Abbildung T_E in (62) gilt

$$\|T_E^{-1}\| < \infty\,.$$

Definition 10.5
Sei E ein Operatorraum. Dann sei die Exaktheitskonstante $ex(E)$ *von E definiert durch*

$$ex(E) := \sup\left\{ \|T_E^{-1}\| \,\middle|\, A\ C^*\text{-Algebra},\ I \text{ Ideal in } A,\ T_E \text{ wie in (62)} \right\}, \tag{67}$$

wobei $\|T_E^{-1}\|$ gemäß (66) zu interpretieren ist.

Man beachte, dass $ex(E)$ mit dem Wert $\alpha := \sup \|T_E^{-1}\|_{cb}$ zusammenfällt. Tatsächlich ist sicherlich $ex(E) \leq \alpha$ und wegen der Umformung in (63) und (64) aber $\forall A, I$ auch $\|T_E^{-1}\|_{cb} = \|id_K \otimes T_E^{-1}\|$. Letztere Abbildung ist aber $\|T_E^{-1}\|$ für die Auswahl $K \otimes_{min} A, K \otimes_{min} I$, also $\alpha \geq ex(E)$.

Die folgende Aussage ist eine unmittelbare Folgerung von [W2, Lemma1.10].

Lemma 10.6 (W2, Lemma1.10)
Seien A eine C^*-Algebra, I ein (2-seit.,abg.) Ideal in A. Sei E ein Operatorraum und $F \subseteq E$. Dann gilt vollständig isometrisch

$$(A \otimes_{min} F)/(I \otimes_{min} F) \subseteq (A \otimes_{min} E)/(I \otimes_{min} E)\,. \tag{68}$$

Beweis 50
Beh.: für alle $x \in A \otimes F$ gilt: $dist(x, I \otimes_{min} F) = dist(x, I \otimes_{min} E)$.
Sei e_i eine approximierende Einheit in I mit $0 \leq e_i \leq 1$, wo 1 eine Einheit für A ist, die aber nicht notwendig in A liegen muss. Insbesondere ist $\|1 - e_1\| \leq 1$ und $e_1 \otimes 1_E$ bildet eine approx. Einheit in $I \otimes E$, wo 1_E eine Einheit in irgendeiner C^* Algebra sei, in der E vollst. isometr. eingebettet ist. (Wenn hier herumultipliziert wird, so sind die Multiplikationen in diesen genügend großen C^*-Algebren mit Einheit, in die A und E vollst. isometr. eingebettet sind, auszuführen.)
Sei nun $\varepsilon > 0$. Sei $\delta := dist(x, I \otimes_{min} E)$. Dann gibt es ein $a \in I \otimes E$, sodass $\|x - a\| \leq \delta + \varepsilon$. Wähle e_i so, dass $\|a - a(e_i \otimes 1_E)\| \leq \varepsilon$. Dann ist

$$\|x - x(e_i \otimes 1_E)\| \leq \|(x-a)(1 \otimes 1_E - e_i \otimes 1_E)\| + \|a(1 \otimes 1_E - e_i \otimes 1_E)\|$$

$$\leq \|x - a\|\,\|1 - e_i\| + \varepsilon \leq \delta + 2\varepsilon\,.$$

Nun ist $x(e_i \otimes 1_E) \in I \otimes F$. Da ε beliebig ist, ist $dist(x, I \otimes_{min} F) \leq \delta$. Die umgekehrte Ungleichung ist trivial. Also gilt die Behauptung.
Bette nun ein wie in (68) mit der Vorschrift $T : a \otimes f + I \otimes_{min} F \mapsto a \otimes f + I \otimes_{min} E$. Mit oben gezeigter Behauptung ist T eine Isometrie und damit ist T auch sicher wohldefiniert. Die vollständige Isometrie folgt einfach, indem man A durch $M_n \otimes A$ ersetzt und I durch $M_n \otimes I$ ersetzt. □

Proposition 10.7
Sei E ein Operatorraum und $F \subseteq E$ ein Teiloperatorraum. Dann gilt für die Abbildungen T_E, T_F (für beliebige A, I) wie in (62) unter Beachtung von (66), dass

$$\|T_F^{-1}\| \leq \|T_E^{-1}\|\,.$$

Insbesondere $ex(F) \leq ex(E)$. Und insbesondere ist F exakt, wenn E exakt ist.

Beweis 51
Unter Ausnutzung von 10.6 ist

$$T_F^{-1} : (A/I) \otimes F \to (A \otimes_{min} F)/(I \otimes_{min} F) \subseteq (A \otimes_{min} F)/(I \otimes_{min} F)$$

nur die Einschränkung von T_E^{-1} und damit folgt die Behauptung.
Wenn nun E exakt, also genau dann wenn $\|T_E^{-1}\| < \infty$ für alle T_E (wie schon besprochen), so ist nun auch $\|T_F^{-1}\| < \infty$ für alle T_F, also ist F exakt. $\square$

Lemma 10.8

Sei E ein Operatorraum. Dann gilt

$$ex(E) = \sup \{ \, ex(E_0) \mid E_0 \subseteq E \text{ mit } E_0 \text{ endlichdimensional} \, \} .$$

Beweis 52

Gemäß 10.7 gilt für alle endlichdimensionalen Operatorräume $E_0 \subseteq E$, dass $ex(E_0) \leq ex(E)$. Umgekehrt sei $z := \sum_k (a_k + I) \otimes e_k \in (A/I) \otimes E$ mit Norm 1. Dann ist für Φ wie in (65)

$$\|\Phi^{-1}(z)\| = \| \sum_k a_k \otimes e_k + I \otimes_{min} E\|_{(A \otimes_{min} E)/(I \otimes_{min} E)} . \tag{69}$$

Verwendet man nun die Approximation in (25) und (26) für den Fall $M_n = M_1$, so gibt es einen endlichdimensionalen Operatorraum $E_0 \subseteq E$ mit $e_k \in E_0$, sodass (69) weitergleich ist

$$\approx \| \sum_k a_k \otimes e_k + I \otimes_{min} E_0\|_{(A \otimes_{min} E_0)/(I \otimes_{min} E_0)} \leq \|T_{E_0}^{-1}\| \, \|z\| \leq ex(E_0) .$$

Und das ist kleiner gleich $\beta := \sup_{E_0} ex(E_0)$, wo man das Supremum über alle endlichdim. Teilräume $E_0 \subseteq E$ nimmt. Also $\|\Phi^{-1}\| \leq \beta$. Nimmt man nun das Supremum über alle A, I, so folgt $ex(E) \leq \beta$. $\square$

Für den nächsten Satz benöten wir ein Lemma.

Lemma 10.9

Sei Y ein Vektorraum, I eine Indexmenge und $F := \{ \, f \mid f : I \to Y \, \}$ der Funktionenvektorraumraum unter den punktweisen Operationen. Seien nun $f_1, ..., f_n \subseteq F$. Dann sind die f_k linear unabhängig genau dann, wenn es eine maximal n-elementige Menge $J := \{x_1, ..., x_n\} \subseteq I$ gibt, sodass die auf J eingeschränkten Funktionen $f|_J$ linear unabhängig sind.

Beweis 53

Seien die f_k linear unabhängig. Für jedes $x \in I$ sei L_x die Menge aller n-Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, die folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_n f_n(x) = 0 .$$

Sicherlich ist L_x ein linearer Raum. Wegen der lin. Unabhängigkeit der f_k ist $\cap_{x \in I} L_x = 0$. Damit findet man aber sicher ein $x_1 \in I$, sodass $dim(L_{x_1}) \leq n-1$. Da der Durchschnitt aller L_x gleich 0 ist, muss es ein x_2 geben, sodass $L_{x_1} \cap L_{x_2} \subset L_{x_1}$ (echte Inklusion). D.h. aber, dass $dim(L_{x_1} \cap L_{x_2}) < dim(L_{x_1})$. Usw. ist man nach (maximal) n Schritten fertig, sodass $\cap_{k=1}^n L_{x_k} = 0$. Setzt man nun $J := \{x_1, ..., x_n\}$, so heißt das aber, die f_k sind schon linear unabhängig, wenn man sie auf J einschränkt.
Die Umkehrung ist trivial. $\square$

Pisier hat folgenden Satz bewiesen.

Satz 10.10 (P, p74 Theorem 6.2.1)
Sei E ein Operatoraum. Dann sind äquivalent:
(i) E ist exakt.
(ii) Für alle Familien von Operatorräumen $(E_i)_{i\in I}$ und alle Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I gilt

$$(\oplus_i E_i/\mathcal{U}) \otimes_{min} E \subseteq \oplus_i (E_i \otimes_{min} E)/\mathcal{U} \qquad \textit{vollständig isomorph}\,, \tag{70}$$

wobei die Einbettung (70) von der Form

$$(\oplus_i e_i + J) \otimes e \mapsto \oplus_i (e_i \otimes e) + J$$

ist und das $+J$ bedeudet: plus dem von $\mathcal{U}$ erzeugten Modulorest.
(iii) Wie (ii) mit der Ergänzung: es gibt ein $C > 0$, sodass alle Einbettungen (70) vollständig beschränkt sind mit $\leq C$.
(iv) Wie (iii) eingeschränkt auf Familien von Operatorräumen $(E_i)_{i\in\mathcal{N}}$, wo alle E_i endlichdimensional und von gleicher Dimension seien.
(v) Es gibt ein $C > 0$, sodass

$$d_{SK}(F) \leq C \qquad \forall \textit{ endlichdimensionalen Operatorräume } F \subseteq E.$$

(vi) Wie (ii) oder (iii) oder (iv) mit der Änderung: "vollständig isomorph" wird durch "isomoprh" ersetzt, und "vollständig beschränkt" durch "beschränkt".

Beweis 54
(i) $\Rightarrow$ (ii): Seien $E_i \subseteq A_i$ für C^*-Algebren A_i. Sei J der durch $\mathcal{U}$ in $\oplus A_i$ erzeugte Kern, also $\oplus A_i/\mathcal{U} = (\oplus A_i)/J$. Da F exakt ist, gilt

$$[(\oplus A_i)/J] \otimes_{min} E \approx [(\oplus A_i) \otimes_{min} E]/[J \otimes_{min} E]\,. \tag{71}$$

Mit 7.6 kann man den rechten Raum vollständig isometrisch in $\oplus_i (A_i \otimes_{min} E)/\mathcal{U}$ einbetten und man erhält also vollständig isomorph (dass T_E^{-1} *vollständig* beschränkt ist, wenn E exakt ist, haben wir bald nach der Definition von T_E geklärt)

$$[\oplus A_i/\mathcal{U}] \otimes_{min} E \subseteq \oplus (A_i \otimes_{min} E)/\mathcal{U} \qquad \text{vollständig isomorph} \tag{72}$$

Da $G := [\oplus E_i/\mathcal{U}] \otimes E \subseteq [\oplus A_i/\mathcal{U}] \otimes_{min} E$, kann man G in der Einbettung (72) auswerten und das Bild wegen 7.4.(ii) vollständig isometrisch in $\oplus (E_i \otimes_{min} E)/\mathcal{U}$ einbetten. Die Umkehrung davon ist aber wegen (72) ebenfalls vollständig beschränkt und damit folgt mit 1.7 die Behauptung (72) mit E_i statt A_i.
Man beachte, dass die Einbettung (71) vollständig beschränkt ist mit $\|T_E^{-1}\|_{cb} \leq ex(E)$ und die gleiche Abschätzung gilt damit auch für (70).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen, es gibt nicht so eine Schranke C. Dann gibt ($j \in \mathcal{N}$) eine Folge von Indexmengen I_j und Ultrafiltern $\mathcal{U}_j$ auf I_j und eine Folge von Familien $(E_{j,i})_{i\in I_j}$, sodass deren zugehörigen Einbettungen gemäß (70) vollständig beschränkt sind mit C_j und $C_j \to \infty$ für $j \to \infty$. Für $J := \mathcal{N}$ wende nun das Resultat in (7.5) an und übernehme die dort eingeführten Bezeichnungen. Setze $F_\alpha := \oplus_{j\in J} E_{j,\alpha_j}$ für $\alpha \in I$. Wegen der Voraussetzung (ii) ist eine vollständig isomorphe Einbettung

$$\Psi : \oplus_{\alpha\in I} F_\alpha/\mathcal{U} \otimes_{min} E \subseteq \oplus_{\alpha\in I}(F_\alpha \otimes_{min} E)/\mathcal{U} \subseteq \oplus_{\alpha\in I}[\oplus_{j\in J}(E_{j,\alpha_j} \otimes_{min} E)]/\mathcal{U} =: Y$$

gestattet, wobei die letzte Inklusion vollst. isometrisch ist. Wegen 7.5 ist aber auch $\forall s \in \mathcal{N}$

$$Y_s := \oplus_{i\in I_s}(E_{s,i} \otimes_{min} E)/\mathcal{U}_s \subseteq Y\,. \tag{73}$$

Wertet man nun gemäß (35) $X_s := \oplus_{i\in I_s} E_{s,i}/\mathcal{U}_s$ in Ψ aus, so landet man eigentlich in Y_s gemäß (73). Und diese Auswertung entspricht genau der Einbettung (70) angewendet auf X_s. Da diese nach Vorausetzung vollständig beschränk ist mit C_s und $C_s \to \infty$ für $s \to \infty$, ist Ψ nicht vollständig beschränkt. Und das ist ein Widerspruch.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Sei $F \subseteq E$ ein fester d-dimensionaler Teilraum. Es ist $F \subseteq B(l^2)$. Sei $Q_n : B(l^2) \to M_n : x \mapsto P_n x P_n$ die übliche, natürliche Projektion. Q_n ist vollständig beschränkt mit $\leq \|P_n\|\|P_n\| \leq 1$. Sei $F_n := Q_n(F)$. Sei $\mathcal{W}$ die Filterbasis der Endstückfolgen in $\mathcal{N}$ und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter von $\mathcal{W}$. Sei $u_n : F \to F_n$ die Einschränkung von Q_n auf F. 7.7 gestattet nun eine Abbildung

$$u : F = \oplus_n F/\mathcal{U} \to \oplus_n F_n/\mathcal{U} \qquad \text{mit } \|u\|_{cb} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|u_n\|_{cb} \leq 1\,.$$

u hat das Aussehen (wo I immer für einen Modulorest, erzeugt durch $\mathcal{U}$, steht)

$$u : f \mapsto \oplus_n f + I \mapsto \oplus_n u_n(f) + I = \oplus_n P_n f P_n + I\,. \tag{74}$$

Behauptung: u ist eine vollständig isometrische Bijektion:
(1) Es ist

$$\|u(f)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|u_n(f)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|P_n f P_n\| = \lim_{\mathcal{W}} \|P_n f P_n\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n f P_n\| = \|f\|\,.$$

Also ist u eine Isometrie. Und sogar eine vollständige Isometrie: Man hat eine analoge Rechnung für die k-te Matrizenabbildung $id_k \otimes u$, wobei statt P_n nun $1_{M_k} \otimes P_n$ auftritt.
(2) Beh.: u_n invertierbar für fast alle n: Man kann doch den Vektorraum $B(l^2)$ linear und injektiv einbetten in den Raum der unendlich großen Matrizen $M_\infty(\mathcal{C})$. M_∞ ist aber der Funktionenraum $\{\ \Psi : \mathcal{N}^2 \to \mathcal{C}\ \}$. Wenn $\{f_1, ..., f_d\}$ eine Basis von F ist, so betrachte die f_k als Elemente in M_∞. Wegen 10.9 sind dann die f_k schon linear unabhängig, wenn man ihren Definitionsbereich auf eine d-elementige Menge $J \subseteq \mathcal{N}^2$ einschränkt. Da die Abbildungen u_n die Matrizen f_k nur auf endliche Matrizen projezieren, sind die $u_n(f_k)$ l.u., sobald $J \subseteq \{1, ..., n\}^2$.
Da fast alle u_n invertierbar und damit surjektiv sind, wird auch u eine surjektive Abbildung. Genauer kann man sich alle u_n invertierbar vorstellen, wenn man gemäß (31) $\oplus_n F_n/\mathcal{U}$ ein wenig einschränkt.

Es ist $u^{-1} \in cb(\oplus_n F_n/\mathcal{U}, F)$. Gemäß (41) bette nun u^{-1} in $\oplus_n cb(F_n, F)/\mathcal{U}$ ein mit $u^{-1} \equiv \oplus_n v_n + I$, wo $v_n \in cb(F_n, F)$. Beachte, dass wegen der Voraussetzung (iv) und wegen (41) diese Umbettung beschränkt ist mit C aus (iv), d.h.

$$\| \oplus_n v_n + I\| = \lim_{\mathcal{U}} \|v_n\|_{cb} \leq C\|u^{-1}\|_{cb} = C\,.$$

Es gilt wegen (42) der Zusammenhang

$$u^{-1}(\oplus_n f_n + I) = \lim_{\mathcal{U}} v_n(f_n)\,. \tag{75}$$

Setzt man in (75) $u(f) = \oplus_n u_n(f) + I =: f_n + I$, so erhält man

$$f = \lim_{\mathcal{U}} v_n u_n(f)\,. \tag{76}$$

Da F endlichdimensional ist, hat (76) auch Konvergenz in der cb-Norm zur Folge, also $\lim_{\mathcal{U}} \|id - v_n u_n\|_{cb(F,F)} = 0$ und damit $\lim_{\mathcal{U}} \|u_n^{-1} - v_n\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|id - v_n u_n\| \sup_{n\in\mathcal{N}} \|u_n^{-1}\| = 0$. (Beachte, dass $\|u_n^{-1}\|$ eine monoton fallende Folge sein muss aufgrund der Definition der u_n, also das Supremum ist hier endlich.) Da sicherlich $d_{SK}(E) \leq \|u_n\|_{cb}\|u_n^{-1}\|_{cb}$ für alle n gilt, folgt

$$d_{SK}(E) \leq \lim_{\mathcal{U}} \|u_n\|_{cb}\|u_n^{-1}\|_{cb} = \lim_{\mathcal{U}} \|u_n\|_{cb}\|v_n\|_{cb} \leq C \tag{77}$$

(v) $\Rightarrow$ (i): Ziel ist die Ungleichung

$$ex(E) \leq \sup\{d_{SK}(F) \,|\, F \subseteq E,\, dim(F) < \infty\}\,, \tag{78}$$

welche für jeden beliebigen Operatorraum E gilt. Seien F, G endlichdimensionale Operatorräume von gleicher Dimension und $u : F \to G$ so, dass $d_{cb}(F,G) = \|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb}$. Für beliebige A, I lässt sich T_F^{-1} linear algebraisch faktorisieren durch

$$T_F^{-1} : (A/I) \otimes F \to (A/I) \otimes G \to^{T_G^{-1}} (A \otimes G)/(I \otimes G) \to (A \otimes F)/(I \otimes F)$$

und ist beschränkt durch $T_F^{-1}\| \leq d_{cb}(F,G)\, \|T_G^{-1}\|$, also

$$ex(F) \leq d_{cb}(F,G)\, ex(G)\,.$$

Für $G \subseteq K$ gilt wegen 10.7 $ex(G) \leq ex(K) = 1$, also $ex(F) \leq d_{cb}(F,G)$ und damit gilt

$$ex(F) \leq \inf\{\, d_{cb}(F,G) \,|\, G \subseteq K\,\} = d_{SK}(F)\,.$$

Aus dieser Abschätzung folgt in Kombination mit 10.8 die Ungleichung (78). Mit der Voraussetzung (v) ist nun damit aber $ex(E) < \infty$ und damit E notwendig exakt, da T_E nun immer invertierbar ist.

(iv) Sei E exakt, dann gilt natürlich auch (ii) für "beschränkt" statt "vollst. beschränkt". Im Beweisschritt "(ii) $\Rightarrow$ (iii)" war "vollständig" nicht wesentlich. Der Beweis geht genauso mit der geänderten Version (vi) auf. Im Beweisschritt "(iv) $\Rightarrow$ (v)" wurde "vollständig beschränkt" gar nicht verwendet. Es genügte "beschränkt". Also gehört auch (vi) zu den Äquivalenzpunkten. $\square$

Pisier hat beobachtet, dass man die optimale Konstante C, die in 10.10.(v) auftritt, angeben kann (siehe untenstehendes Korollar). Motiviert durch 10.10 definiert man:

Definition 10.11

Sei E ein Operatorraum. Dann setzt man

$$d_{SK}(E) := \sup\{\, d_{SK}(F) \mid F \subseteq E,\, dim(F) < \infty \,\}\,, \tag{79}$$

wobei für $d_{SK}(F)$ die Definition aus dem Kapitel "Endlichdim. Operatorräume" verwendet wird.

Man beachte, dass für einen endlichdim. Operatorraum E die neue Definition d_{SK} mit der alten $d_{SK}^{(a)}$ zusammenfällt: Es folgt aus der Definition von $d_{SK}^{(a)}(E) = \inf_{X \subseteq K}\, d_{cb}(E, X)$, dass $d_{SK}^{(a)}(F) \leq d_{SK}^{(a)}(E)$ für $F \subseteq E$. Damit ist $d_{SK}(E) = \sup_F\, d_{SK}^{(a)}(F) = d_{SK}^{(a)}(E)$.

Korollar 10.12 (P, Theorem 6.2.2)

Für jeden Operatorraum E gilt

$$ex(E) = d_{SK}(E)\,. \tag{80}$$

Und E ist genau dann exakt, wenn (80) $< \infty$.

Beweis 55

Wenn E nicht exakt ist, so ist $d_{SK}(E) = \infty$ wegen 10.10. Sicherlich ist aber auch aufgrund von Definition $ex(E) = \infty$, da irgendein T_E nicht invertierbar ist.
Sei E exakt. Die Ungleichung $ex(E) \leq d_{SK}(E)$ gilt immer wegen (78). Umgekehrt gibt es wegen 10.10.(v) ein $C > 0$, sodass $d_{SK}(E) \leq C$. Im Beweisschritt 10.10."(iv) $\Rightarrow$ (v)" wurde aber gezeigt, dass dieses C gleich dem C in der Aussage 10.10.(iv) bzw. (iii) ist. Man mag also C in (iii) möglichst minimal wählen. Im Beweisschritt 10.10."(i) $\Rightarrow$ (ii)" wurde aber gezeigt, dass $ex(E)$ immer so eine Schranke ist. Also $ex(E) \leq d_{SK}(E) \leq C \leq ex(E)$. $\square$

11 Diskrete-Gruppen C^*-Algebren

Ich behandle kurz die Gruppen C^*-Algebren diskreter Gruppen, soweit sie im Kapitel 12 benötigt werden.

Sei G im Folgendem immer eine diskrete Gruppe mit neutralem Element e.

Die Elemente aus $x \in l^1(G)$ kann man darstellen in der Form $x = \sum_{t \in G} x(t)\, \delta_t$, wobei $\delta_t \in l^1(G)$ von der Gestallt sei: $\delta_t(t) = 1$ und sonst 0. Identifiziert man t mit δ_t, so kommt man auf die elegante Schreibweise

$$x = \sum_{t \in G} \alpha_t\, t\,,$$

wo hier $\alpha_t = x(t)$, also Skalare. Man führt eine Multiplikation auf $l^1(G)$ ein, die sich auf natürliche Art formal errechnet durch

$$\Big(\sum_{t\in G} \alpha_t\, t\Big)\Big(\sum_{s\in G} \beta_s\, s\Big) := \sum_{t\in G}\sum_{s\in G} \alpha_t\beta_s\, ts\,.$$

Diese Multiplikation heißt auch Faltung. Insbesondere bildet damit G eine Gruppe in $l^1(G)$ unter der Faltung, d.h. $\{\,\delta_t\,|\,t\in G\,\}$ bildet eine Gruppe und wegen $\delta_s\delta_t \equiv st \equiv \delta_{st}$ ist die Identifikation $t\equiv\delta_t$ ein Gruppenhomomorphismus.

Bezeichne mit $l(G)$ die Gesamtheit aller Elemente in $l^1(G)$ mit endlichem Träger, also die Teilalgebra

$$l(G) := \Big\{\,\sum_t \alpha_t\, t \,|\, \text{alle bis auf endlich viele } \alpha_t \text{ sind } 0\Big\}\,.$$

G bildet also eine (linear-algebraische) Basis von $l(G)$. $l^1(G)$ wird zu einer involutiven Algebra, wenn man $(\sum_t \alpha_t\, t)^* := \sum_t \overline{\alpha_t}\, t^{-1}$ setzt. Beachte zudem, dass $l^1(G)$ mit e eine Einheit besitzt.

Analog wie im Falle von $l^1(G)$ enthält auch $l^2(G)$ ganz G. Dabei bildet G eine ONB von $l^2(G)$. Damit ist auch für alle Elemente aus $l^2(G)$ ist eine eindeutige Darstellung $\sum_{t\in G}\alpha_t\, t$ gestattet.

Ist ein *-homomorphismus $\pi : l^1(G)\to A$ in eine C^*-Algebra A gegeben, der zudem stetig ist bezüglich der l^1-Norm, so muss zwangsläufig

$$\pi(\sum_{t\in G}\alpha_t\, t) = \sum_{t\in G}\alpha_t\,\pi(t) \tag{81}$$

gelten, wobei insbesondere $\pi(st) = \pi(s)\pi(t)$ und $\pi(t)^* = \pi(t^{-1})$ gelten. Hat zudem A eine Einheit 1 und erfüllt $\pi(e) = 1$, so bildet π eingeschränkt auf G einen Gruppenhomomorphismus mit Bild in der unitären Gruppe von A. π ist damit eine sogenannte "unitäre Darstellung der Gruppe G in die C^*-Algebra A". Umgekehrt definiert jede unitäre Gruppendarstellung π auf G einen *-homomorphismus gemäß (81) auf $l^1(G)$, den man ebenfalls mit π bezeichne.

Die Linksreguläre Darstellung $\lambda : G\to B(l^2(G))$ ist definiert durch die Linksmultiplikation, d.h.

$$\lambda(s)\Big(\sum_{t\in G}\alpha_t\, t\Big) := s\,\Big(\sum_{t\in G}\alpha_t\, t\Big) = \sum_{t\in G}\alpha_t\, st\,,$$

wo $\sum_{t\in G}\alpha_t\, t\in l^2(G)$. λ ist damit eine unitäre Gruppendarstellung, kann ausgedehnt werden auf $l^1(G)$ und bleibt injektiv. $l^1(G)$ ist damit eine involutive Teilalgebra von $B(l^2(G))$, deren Abschluss in $B(l^2(G))$ mit $C^*_\lambda(G)$ oder kurz mit $C_\lambda(G)$ bezeichnet wird. Klarerweise ist $C_\lambda(G)$ eine C^*-Algebra.

Mit der "vollen C^*-Algebra der Gruppe G" ist der Abschluss von $l^1(G)$ unter der C^*-Norm

$$\|x\| := \sup_\pi \|\pi(x)\| \qquad x\in l^1(G)$$

gemeint, wobei das Supremum über alle unitären Gruppenarstellungen $\pi : G \to B(h)$ und alle Hilberträume h zu nehmen ist. Diese C^*-Algebra wird mit $C^*(G)$ bezeichnet.

Lemma 11.1

(i) Seien G_1, G_2 diskrete Gruppen. Dann gilt als Hilberträume

$$l^2(G_1) \otimes_2 l^2(G_2) = l^2(G_1 \times G_2)$$

(ii) Die unitären Gruppendarstellungen $\pi : G_1 \times G_2 \to A$, wo A eine unitale C^*-Algebra, sind genau die von der Form $\pi(s \times t) = \pi_1(s)\pi_2(t)$, wo $\pi_1 : G_1 \to A$ und $\pi_2 : G_2 \to A$ unitäre Gruppendarstellungen und wo π_1, π_2 ein kommutierendes Paar ist: $\pi_1(s)\pi_2(t) = \pi_2(t)\pi_1(s) \, \forall s \in G_1, t \in G_2$.
(iii) Das Bild der linksregulären Darstellung $\lambda : G_1 \times G_2 \to B(l^2(G_1 \times G_2)) =: A$ liegt in $B(l^2(G_1)) \otimes_{min} B(l^2(G_2)) \subseteq A$. λ ist von der Form

$$\lambda(s \times t) = \lambda_1(s) \otimes \lambda_2(t) \, ,$$

wo $\lambda_1 : G_1 \to B(l^2(G_1))$, $\lambda_2 : G_2 \to B(l^2(G_2))$ die linksregulären Darstellungen sind.

Beweis 56

(i) Sei $H := l^2(G_1) \otimes_2 l^2(G_2)$. Die Abbildung

$$u : l(G_1 \times G_2) \to H : x = \sum_{s,t \in G} \alpha_{ts} \; t \times s \mapsto \sum_{s,t \in G} \alpha_{ts} \; t \otimes s$$

definiert eine lineare Abbildung mit $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{t,s} |\alpha_{t,s}|^2$. Da das Bild von u schon dicht liegt in H, ist die isometrische Fortsetzung von u eine Bijektion. (Bemerkung: es war in dieser Rechnung nicht wesentlich, dass G_1, G_2 Gruppen sind.)
(ii) Es ist $\pi(s \times e) = \pi_1(s)$ und $\pi(e \times t) = \pi_2(t)$. Man braucht die Behauptungen nur auszurechnen.
(iii) Betrachtet man $\lambda_1(s) \otimes \lambda_2(t)$ als Element in $B(l^2(G_1) \otimes_2 l^2(G_2)) = B(l^2(G_1 \times G_2))$, so ergibt sich ($\tilde{s} \in G_1, \tilde{t} \in G_2$)

$$\lambda_1(s) \otimes \lambda_2(t) \, (\tilde{s} \otimes \tilde{t}) = s\tilde{s} \otimes t\tilde{t} = s\tilde{s} \times t\tilde{t} = \lambda(s \times t) \, (\tilde{s} \times \tilde{t})$$

Also ist $\lambda_1(s) \otimes \lambda_2(t)$ tatsächlich $\lambda(s \times t)$. $\square$

Definition 11.2

Sei G eine (diskrete) Gruppe. Eine Folge $x_1, x_2, ..., x_n$ in G heißt minimal, *wenn $x_i \neq x_{i+1}$ für alle $1 \leq i < n$.*
Sei $X \subseteq G$ eine Teilmenge. Dann hat X die Leinerteigenschaft, *wenn für alle $n \geq 1$ und alle minimalen Folgen $x_1, ..., x_{2n} \in X$ gilt:*

$$x_1^{-1} \, x_2 \, x_3^{-1} \, x_4 \ldots x_{2n-1}^{-1} \, x_n \neq e \tag{82}$$

Ein Element $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in l(G)$, wo $\alpha_i \in \mathcal{C}$, $x_i \in G$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, heißt freier Operator, *wenn $X = \{x_1, ..., x_n\}$ die Leinerteigenschaft hat.*

Beispiel: Wenn F eine freie Gruppe ist, so hat die Menge

$$X := \{\, x \in F \,|\, x \text{ ist ein Buchstabe, also } |x| = 1 \,\} \tag{83}$$

die Leinerteigenschaft: tatsächlich, könnte man für eine minimale Folge $x_1, ..., x_{2n} \in X$ den Ausdruck (82) auf e zusammenkürzen, so müsste zwingend $x_i = x_{i+1}$ für ein i gelten, also die Folge wäre nicht minimal. Klarerweise hat mit X jede Teilmenge $Y \subseteq X$ die Leinert-eigenschaft. Allerdings: wenn F mindestens zwei Erzeugende x, y besitzt ($x \neq y$), dann ist beispielsweise die Folge xy, x, y^{-1}, e minimal, aber $(xy)^{-1}\, x\, (y^{-1})^{-1}\, e = e$.

In [AO], beruhend auf Vorarbeiten, wird für einen freien Operator $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ die Norm in der reduzierten C^*-Algebra $C^*_\lambda(G)$ errechnet. Es ergibt sich eine fast explizite Formel, abhängig allein von den Koeffizienten α_i:

Satz 11.3 (AO, Theorem IV G und Theorem IV J, p1037)
(i) Sei $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ein freier Operator. Dann ist

$$\|\lambda(a)\|_{C^*_\lambda} = \min\left\{\, 2z + \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{z^2 + |\alpha_i|^2} - z\right) \,\middle|\, z \geq 0,\ z \in \mathcal{C} \,\right\}$$

(ii) Sei $a = \sum_{i=1}^n x_i$ ein freier Operator mit $n > 1$. Dann ist $\|\lambda(a)\|_{C^*_\lambda} = 2\sqrt{n-1}$.

Der Beweis ist ziemlich aufwendig.

Sei F eine freie Gruppe. Dann hat in $F \times F$

$$X = \{\, t \times t \in F \times F \mid t \text{ ist ein Buchstabe, d.h. } |t| = 1 \,\} \tag{84}$$

die Leinerterteigenschaft. Das folgt schnell aus der Leinerteigenschaft von (83). Damit erhalten wir jetzt das Resultat, das wir speziell im nächsten Kapitel benötigen:
Seien g_i erzeugende Elemente von F ($g_i \neq g_j$ für $i \neq j$), dann gilt mit 11.1.(iii), 11.3.(ii) und (84), Λ die linksreguläre Darstellung auf $F \times F$,

$$\|\sum_{i=1}^n \lambda(g_i) \otimes \lambda(g_i)\|_{C^*_\lambda(F) \otimes_{min} C^*_\lambda(F)} = \|\Lambda(\sum_{i=1}^n g_i \times g_i)\|_{C^*_\lambda(F \times F)} = 2\sqrt{n-1} \quad (n > 1)\,. \tag{85}$$

12 $B(h)$ ist nicht nuklear (Beweis von Junge/Pisier)

In diesem Kapitel wiederhole ich Resltat und Beweis von Junge und Pisier, dass OS_n bezüglich der δ_{cb}-Norm für $n > 2$ nicht separabel ist [JP]. Daraus folgern sie dann nach einer Idee von Kirchberg, dass für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum h, die involutive Algebra $B(h) \otimes B(h)$ mindestens zwei C^*-Normen besitzt.

Lemma 12.1
(i) Sei L die C^*-Algebra $L := \oplus_{n \geq 1} M_n$. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathcal{N}$. Dann ist

$$I_{\mathcal{U}} = \{x \in L|\ \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i}\, tr\,(x_i^* x_i) = 0\}\,,$$

ein (2seit., abg.) Ideal in L.
(ii) Zusätzlich ist $\lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i} tr\,(x_i^* y_i) = 0$ für $x \in I_{\mathcal{U}}$ oder $y \in I_{\mathcal{U}}$.

Beweis 57
(i) Beachte, dass die Spurabbildung $tr : M_i \to \mathcal{C}$ beschränkt ist mit i und damit $\frac{1}{i} tr(x_i^* x_i) \leq \|x_i\|^2 \leq \|x\|^2$, d.h. $lim_{\mathcal{U}}$ davon existiert immer.

$I_{\mathcal{U}}$ ist ein lin. Raum: Ausrechnen zeigt die "Parallellogrammregel"

$$(x+y)^*(x+y) + (x-y)^*(x-y) = 2(x^*x + y^*y)$$

für beliebige Elemente x, y einer C^*-Algebra. Daraus folgt sofort

$$(x+y)^*(x+y) \leq 2(x^*x + y^*y)\,. \tag{86}$$

Aus (86) folgt nun ziemlich unmittelbar - unter Beachtung, dass die Spur positiv ist - die Behauptung.

$I_{\mathcal{U}}$ ist ein Ideal: Sei $x \in I_{\mathcal{U}}$ und $y \in L$. Nimm zuerst an, y sei unitär, d.h. alle y_i sind unitär in M_i. Es ist bekannt, dass $tr(y_i^* x_i y_i) = tr(x_i)$ für y_i unitär. Damit ist

$$tr((x_i y_i)^*(x_i y_i)) = tr(y_i^*(x_i^* x_i) y_i) = tr(x_i^* x_i)\,,$$

und es folgt unmittelbar, dass $I_{\mathcal{U}}$ ein einseitiges Ideal ist. Für die Multiplikation von der anderen Seite erhält man die "gleiche" Rechnung, unter Beachtung, dass allgemein für die Spur gilt: $tr(xy) = tr(yx)$.
Wenn nun $y \in L$ beliebig ist, so ist es Summe von 4 unitären Elementen und die Behauptung gilt auch für dieses y.

$I_{\mathcal{U}}$ ist abgeschlossen: Sei x^k eine Folge in $I_{\mathcal{U}}$, die gegen ein $x \in L$ konvergiert. Dann konvergiert $(x^k)^* x^k \to x^* x$ in L. Setze $T(x) := \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i} tr\,(x_i)$. Dann ist T beschränkt mit 1 (so wie ganz oben gezeigt.) Damit ist $T(x^*x) = \lim_k T((x^k)^* x^k) = 0$.

(ii) Setze $T(x) := \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i} tr\,(x_i)$. Dann definiert $< x, y > := T(y^* x)$ ein inneres Produkt auf L und die Behauptung ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|T(y^*x)| \leq |T(x^*x)|\,|T(y^*y)|\,.$$

□

Hier ein Resultat von Simon Wassermann [W1].

Lemma 12.2 (W1, p244-245 Lemma)
Sei F_∞ die freie Gruppe mit card(N) erzeugenden. Sei $\lambda : F_\infty \to B(l^2(F_\infty))$ die linksreguläre Darstellung und VN_λ die von $\lambda(F_\infty)$ erzeugte Von Neumann Algebra. Sei $L = \oplus_{i \geq 1} M_i$ und

$$I_{\mathcal{U}} = \{x \in L |\ lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i} tr\,(x_i^* x_i) = 0\}\,,$$

wo $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf N. Dann gibt es für ein geeignetes $\mathcal{U}$ treue, unitäre Darstellungen

$$q' : F_\infty \to L \quad \text{bzw.} \quad q : F_\infty \to L/I_\mathcal{U}\,,$$

mit $q(f) = q'(f) + I_\mathcal{U}\ \forall f \in F_\infty$, sodass für alle $f, g \in F_\infty$ $q'(f)_i \in M_i$ nur reele Einträge hat und

$$lim_\mathcal{U} \frac{1}{i} tr(\, q'(f)_i^t \, q'(g)_i\,) = \delta_{f,g}\,. \tag{87}$$

Zudem definiert

$$\Phi : VN_\lambda \to L/I_\mathcal{U} \quad : \lambda(g) \mapsto q(g)$$

*einen isometrischen *-homomorphismus.*

Ich erläutere die Darstellung q:
Freie Gruppen haben die endliche Residueneigenschaft, d.h. es gibt eine Folge von normalen Untergruppen H_i von F_∞, sodass

$$F_\infty = H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \ldots \qquad \text{und} \qquad \cap_{i\geq 1} H_i = \{e\} \tag{88}$$

und $n_i := |F_\infty/H_i| < \infty$ für alle i. Demnach kann man F_∞/H_i über die linksreguläre Darstellung in $B(l^2_{n_i}) = M_{n_i}$ einbetten, was unten in (89) gemacht wird. Sei $\mathcal{W}$ die Filterbasis der Endstückfolgen. Schneide zusätzlich jedes Element aus $\mathcal{W}$ mit $N := \{n_1, n_2, \ldots\}$. Das neue $\mathcal{W}$ bleibt eine Filterbasis und kann zu einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ ergänzt werden. Dann betrachte man die Abbildung

$$q : F_\infty \to \prod_{i\geq 1} F_\infty/H_i \to \oplus_{i\geq 1} M_{n_i} \to L \to L/I_\mathcal{U} \tag{89}$$

Ich erläutere die hier auftretenden Einzelabbildungen: Der erste Pfeil sei die Abb. $t \mapsto \prod_i \sigma_i(t)$, wo $\sigma_i : F_\infty \to F_\infty/H_i$ die Quotientenabb. sei. Der zweite Pfeil sei die Abb. $\prod_i \lambda_i$, wo $\lambda_i : F_\infty/H_i \to M_{n_i}$ die Linksreguläre Darstellung sei. Der dritte Pfeil sei die "identische" Einbettung, wobei man die übrigen Koordinaten in L gleich 1_{M_k} setzt ($k \notin N$). Das hat zur Folge, dass der dritte Pfeil multiplikativ ist, unitäre Elemente unitär belässt, und die Eins auf Eins abbildet. Der vierte Pfeil sei einfach die Quotientenabbildung.
Offensichtlich ist der Abschnitt $q' : F_\infty \to L$ eine unitäre Darstellung. Das gleiche gilt für q. q ist treu: Sei $g \neq 1$ in F_∞. (Z.z.: $q(g) \neq 1$.) Dann gibt es wegen (88) ein $j_0 \geq 1$, sodass $g \notin H_j$ für alle $j \geq j_0$. Sei mit den eingeführten Bezeichnungen $(x_i)_i := (\,\lambda_i(\sigma_i(g))\,)_i$ in $\oplus_i M_{n_i}$. Behauptung: $tr(x_j) = 0$ für alle $j \geq j_0$: beachte, dass x_j im Bild der Linksregulären Darstellung λ_i liegt, d.h. x_j permutiert damit nur die Koordinaten in $l^2(F_\infty/H_j)$. Die Matrix x_j enthält damit in jeder Zeile genau eine 1, sonst lauter Nullen. Läge eine 1 in der Diagonale von x_j, so würde eine Koordinate fest gelassen, dass kann aber nicht sein, da nach Voraussetzung $g \neq 1$, also $\sigma_j(g) \neq 1$ (da $g \notin H_j$). Aber die Linksmultiplikative "Verschiebung" der Indexmenge um $\sigma_j(g)$ lässt keinen Index fest. Also die Spur ist 0.

Wäre nun $q(g) = 1$, dann müsste $q'(g) - 1_L \in L$ in $I_{\mathcal{U}}$ liegen. Sei $q'(g) =: (y_i)_i \in L$. Nach dem vorher Geklärten ist $tr(y_j) = 0$ für alle $j \in N$ mit $j \geq n_{j_0}$. Also betrachte (y_i unitär!)

$$lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i} tr((y_i - 1_{M_i})^*(y_i - 1_{M_i})) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i} tr(1_{M_i} - y_i - y_i^* + 1_{M_i}) = 2\,, \tag{90}$$

da $N \cap \{ j \,|\, j \geq n_{j_0} \} \in \mathcal{U}$. Insbesondere ist (90) ein Widerspruch und damit ist q injektiv.

Für den nächsten Satz und auch später wird folgende Bezeichnung verwendet:
Sei F eine freie Gruppe und $\lambda : F \to B(l^2(F))$ die linksreguläre Darstellung und $C^*_\lambda(F)$ die reduzierte C^*-Algebra. Sei E ein Operatorraum. Dann wird die Norm auf $C_\lambda(F) \otimes_{min} E$ mit min abgekürzt:

$$\| \sum_t \lambda(t) \otimes e_t \|_{min} \ := \ \| \sum_t \lambda(t) \otimes e_t \|_{C^*_\lambda(F) \otimes_{min} E}$$

Satz 12.3 (JP, p338 Theorem 1.4)

Seien E,F exakte Operatorräume. Sei $C = d_{SK}(E) d_{SK}(F)$. Sei $u : E \to F^*$ vollständig spurbeschränkt. Seien $(e_t)_{t \in F_\infty}$ und $(f_t)_{t \in F_\infty}$ eine Familie von Elementen aus E bzw. F mit endlichem Träger. Dann gilt

$$\Big| \sum u(e_t)(f_t) \Big| \leq C \|u\|_{tb} \Big\| \sum \lambda(t) \otimes e_t \Big\|_{min} \Big\| \sum \lambda(t) \otimes f_t \Big\|_{min} \quad .$$

Beweis 58

Seien $L, I_{\mathcal{U}}, q, q', \Phi$ wie in Lemma 12.2. Sei $u_i := J_n \otimes u : (M_i \otimes E) \times (M_i \otimes F) \to C$ die i-te Spurabbildung. (Für die Definition der Spurabbildung siehe die Definition am Ende des Kapitels "Der Dualraum" bzw siehe insbesondere auch (19)). Ich verwende im Folgenden ohne besondere Erwähnung die Einbettung $L \otimes_{min} E \subseteq \oplus_i (M_i \otimes_{min} E)$. Siehe dazu 6.1 oder 6.3. Man betrachte die Abbildung (wo $\oplus_i z_i \in L \otimes E$, $\oplus_i w_i \in L \otimes F$, $z_i \in M_n \otimes E$, $w_i \in M_n \otimes F$)

$$V : L \otimes_{min} E \to (L \otimes_{min} F)^* \quad : V(\oplus_i z_i)(\oplus_i w_i) = \lim_{\mathcal{U}} u_i(z_i)(w_i)\,.$$

Tatsächlich ist

$$|V(\oplus_i z_i)(\oplus_i w_i)| \leq \sup_i \|u_i\| \, \|z_i\|_{M_i \otimes E} \, \|w_i\|_{M_i \otimes F} \leq \|u\|_{tb} \, \| \oplus_i z_i\|_{L \otimes_{min} E} \, \| \oplus_i w_i\|_{L \otimes_{min} F}\,.$$

Also auch insbesondere $\|V\| \leq \|u\|_{tb}$. Auf den Elementartensoren hat V folgendes Aussehen: (beachte (19))

$$V((\oplus_i x_i) \otimes e)((\oplus_i y_i) \otimes f) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i} tr\,(x_i^t y_i)\, u(e)(f) \tag{91}$$

Unter Berücksichtigung von 12.1.(ii) ist $V = 0$ in (91) für $\oplus x_i \in I_{\mathcal{U}}$ oder $\oplus y_i \in I_{\mathcal{U}}$. Damit erhält man eine Abbildung $\tilde{V}(a + I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} E)(b + I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} E) := V(a)(b)$ bzw.

$$\tilde{V} : (L \otimes_{min} E)/(I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} E) \to [(L \otimes_{min} F)/(I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} F)]^*\,. \tag{92}$$

Dabei ist sicher $\|\tilde{V}\| = \|V\| \leq \|u\|_{tb}$. Wegen der Exaktheit von E und F erhält man weiter eine Abbildung - siehe dazu (62) -

$$\hat{V} : (L/I_{\mathcal{U}}) \otimes_{min} E \to^{T_E^{-1}} (L \otimes_{min} E)/(I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} E) \to^{\tilde{V}} [(L \otimes_{min} F)/(I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} F)]^*$$

$$\to^{(T_F^{-1})^*} [(L/I_{\mathcal{U}}) \otimes_{min} F)]^* .$$

Aus (79), (67) und 10.12 folgt, dass $\|T_E^{-1}\| \le ex(E) = d_{SK}(E)$. Damit ist

$$\|\hat{V}\| \le \|T_E^{-1}\| \, \|\tilde{V}\| \, \|T_F^{-1}\| \le d_{SK}(E)\, \|u\|_{tb}\, d_{SK}(F) = C\|u\|_{tb} \tag{93}$$

Wegen Lemma 12.2 ist $C_\lambda(F_\infty) \otimes_{min} E \subseteq (L/I_{\mathcal{U}}) \otimes_{min} E$ vermöge $\Phi \otimes id$. Dabei ist $\phi(\,\lambda(t)\,) = q(t) = q'(t) + I_{\mathcal{U}}$. Seien nun $(e_t)_{t\in F_\infty}, (f_s)_{s\in F_\infty}$ wie in der Behauptung. Beachte, dass $\hat{V}$ aufgefasst als Bilinearform nichts anderes ist als die Bilinearform $\tilde{V}$, deren Definitionsbereich um $T_E \times T_F$ transformiert wurde. Es ergibt sich nun

$$\hat{V}(\sum_t \lambda(t) \otimes e_t)(\sum_s \lambda(s) \otimes f_s) = \hat{V}(\,\sum_t (q'(t) + I_{\mathcal{U}}) \otimes e_t\,)(\,\sum_s (q'(s) + I_{\mathcal{U}}) \otimes f_s\,)$$

$$= \tilde{V}(\sum_t q'(t) \otimes e_t + I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} E)(\sum_s q'(s) \otimes f_s + I_{\mathcal{U}} \otimes_{min} F)$$

(beachte (92) und (91))

$$= \sum_s \sum_t \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{i}\, tr(\,q'(t)_i^t\, q'(s)_i\,)\ u(e_t)(f_s) = \sum_t u(e_t)(f_t)\,.$$

Letzte Gleichheit gilt wegen (87). Mit (93) ist damit das Resultat erhalten. □

Korollar 12.4 (JP, p342 Corollary 1.10)

Seien E_i, F_i exakte Operatorräume. Seien $u_i : E_i \to F_i^*$ spurbeschränkt. Gelte

$$C = \sup_i\ d_{SK}(E_i)\, d_{SK}(F_i) < \infty \qquad \text{und} \qquad \sup_i \|u_i\|_{tb} < \infty\,.$$

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf der Indexmenge. Seien $E = \oplus_i E_i/\mathcal{U}$, $F = \oplus_i F_i/\mathcal{U}$ und

$$u : E \to F^* : u(\oplus_i e_i + Rest)(\oplus_i f_i + Rest) := \lim_{\mathcal{U}} u_i(e_i)(f_i)$$

von den u_i erzeugt. Seien $(e_t)_{t\in F_\infty}$ und $(f_t)_{t\in F_\infty}$ zwei Familien von Elementen aus E bzw. F mit endlichem Träger. Dann gilt für $D := \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_{tb}$

$$\Big|\sum_t u(e_t)(f_t)\Big| \le C\,D \Big\|\sum_t \lambda(t) \otimes e_t\Big\|_{min} \Big\|\sum_t \lambda(t) \otimes f_t\Big\|_{min}. \tag{94}$$

Beweis 59

Anmerkung: u ist letztenldich folgende Abbildung: die u_i - mit $\|u_i\| \le \|u_i\|_{tb} \le 1$ - erzeugen eine Abbildung $\oplus E_i/\mathcal{U} \to \oplus F_i^*/\mathcal{U}$ und dieser Zielbereich wird gemäß 7.8 in $(\oplus F_i/\mathcal{U})^*$ eingebettet.

Stehe I immer für einen Modulrest, der durch den Ultrafilter $\mathcal{U}$ erzeugt wird. Seien $e_t = \oplus_i e_{ti} + I \in E$ und $f_t = \oplus_i f_{ti} + I$. Es lässt sich Satz 12.3 einzeln auf die u_i anwenden, also

$$|\sum_t u_i(e_{ti})(f_{ti})| \le C\,\|u_i\|_{tb}\, \|\sum_t \lambda(t) \otimes e_{ti}\|_{C_\lambda^* \otimes_{min} E_i}\, \|\sum_t \lambda(t) \otimes f_{ti}\|_{C_\lambda^* \otimes_{min} F_i}\,.$$

Daraus folgt (wobei man $\sum_t$ auf einen endlichen Träger beschränkt)

$$|\sum_t u(e_t)(f_t)| = |\sum_t u(\oplus_i e_{ti} + I)(\oplus_i f_{ti} + I)| = |\sum_t \lim_{\mathcal{U}} u_i(e_{ti})(f_{ti})|$$

$$\leq \lim_{\mathcal{U}} C\, \|u_i\|_{tb} \, \| \sum_t \lambda(t) \otimes e_{ti} \|_{C^*_\lambda \otimes_{min} E_i} \, \| \sum_t \lambda(t) \otimes f_{ti} \|_{C^*_\lambda \otimes_{min} F_i}$$

$$= C\, D \, \Big\| \oplus_i \, (\sum_t \lambda(t) \otimes e_{ti}) + I \Big\|_{\oplus_i (C^*_\lambda \otimes_{min} E_i)/\mathcal{U}} \, \Big\| \oplus_i \, (\sum_t \lambda(t) \otimes f_{ti}) + I \Big\|_{\oplus_i (C^*_\lambda \otimes_{min} F_i)/\mathcal{U}} . \quad (95)$$

Nun ist $C^*_\lambda(F_\infty)$ eine exakte C^*-Algebra, da sie die 'slice map property' erfüllt (siehe [dCH, Korollar 3.12] folgende und [Kr] für Genaueres) und damit mit Exaktheitskonstante 1. Wir haben die Summe $\sum_t$ endlich gewählt und es ist $\sum_t \lambda(t) \otimes (\oplus_i e_{ti} + I)$ nichts anderes als das Bild der Einbettung 10.10.(ii). Wir haben aber im Beweisschritt (i)$\Rightarrow$(ii) von 10.10 gezeigt, dass diese Einbettung beschränkt ist mit der Exaktheitskonstante des exakten Operatorraumes. Dieser ist in unserem Fall C^*_λ und die Einbettung ist eine (vollständige) Isometrie. Damit ist (95) weiter gleich

$$= C\, D \, \| \sum_t \lambda(t) \otimes e_t \|_{C^*_\lambda \otimes_{min} (\oplus_i E_i/\mathcal{U})} \, \| \sum_t \lambda(t) \otimes f_t \|_{C^*_\lambda \otimes_{min} (\oplus_i F_i/\mathcal{U})} ,$$

also die Behauptung. □

Sei $C^*(G)$ die volle C^*-Algebra einer diskreten Gruppe G. Also $C^*(G)$ ist die Vervollständigung von $l^1(G)$ unter der C^*-Norm - siehe auch das Kapitel "Diskrete-Gruppen C^*-Algebren" -

$$\|x\| := \sup \{ \, \| \sum x(t) \pi(t) \| \mid \pi \text{ eine unitäre Darstellung auf G} \} \qquad , x \in l^1(G) . \quad (96)$$

Wenn I eine Indexmenge ist und $J \subseteq I$ und $F_J \subseteq F_I$ die entsprechenden freien Gruppen, so ist übrigens $C^*(F_J)$ eine C^*-Teilalgebra von $C^*(F_I)$. Man kann nämlich eine unitäre Darstellung π auf F_J leicht auf F_I ausdehnen, indem man $\pi(s) := 1$ setzt für alle Buchstaben s, die nicht in J liegen. Der Rest folgt dann rechnerisch aus der Definition (96).

Der folgende Satz - (OS_n, δ_{cb}) ist nicht separabel für $n > 2$ - kann als der "Hauptsatz" dieses Kapitels angesehen werden. Für das Verständnis seines Beweises benötigt man etwas Wissen über Baireräume. Ich stelle das im folgendem benötigte Wissen über Baireräume hier zusammen:

Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ nennt man dann F_σ-*Menge*, wenn Y abzählbare Vereinigung von in X abgeschlossenen Mengen ist:

$$Y = \cup_{n \geq 1} A_n \qquad (A_n \text{ abgeschlossen})$$

Sei X ein topologischer Raum. Man definiert das Gegenstück zu dichten Mengen wie folgt: $Y \subseteq X$ heißt *nirgendsdicht* in X, wenn das Komplement des Abschlusses von Y dicht liegt in X:

$$X \backslash \overline{Y} \text{ liegt dicht in } X$$

Sei X ein topologischer Raum. $Y \subseteq X$ heißt von *erster Kategorie*, wenn Y abzählbare Vereinigung von nirgendsdichten Mengen ist:

$$Y = \cup_{n \geq 1} A_n \qquad (A_n \text{ nirgendsdicht in } X)$$

Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X, Y nennt man von der *ersten Bairschen Klasse*, wenn das Urbild jeder offenen Menge eine F_σ-Menge ist:

$$\forall \text{ offene Mengen } U \subseteq Y \ : \ f^{-1}(U) \text{ ist } F_\sigma\text{-Menge}$$

Proposition 12.5 (siehe etwa K, §31,X, Theorem 1)
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion der ersten Bairschen Klasse. Wenn Y separabel ist, dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f von erster Kategorie.

Lemma 12.6
Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von erster Kategorie. Dann liegt $X \backslash Y$ dicht in X.

Beweis 60
Sei also $Y = \cup_{n \geq 1} A_n$ mit A_n nirgendsdicht in X, also $S_n := X \backslash \overline{A_n}$ dicht in X. $X \backslash Y = \cap_n (X \backslash A_n) \supseteq \cap_n S_n =: S$. Wir zeigen, dass S dicht liegt in X. Sei U offen in X. Da S_1 offen und dicht in X, ist $U \cap S_1$ offen und nicht leer. Da X kompakt, ist X regulär und damit gibt es ein U_1 offen, sodass $\overline{U_1} \subseteq U \cap S_1$. Da U_1 offen, S_2 offen und dicht, ist $U_1 \cap S_2$ offen und nicht leer. Da X regulär, gibt es ein offenes U_2 mit $\overline{U_2} \subseteq U_1 \cap S_2 \subseteq \overline{U_1}$. Man erhält so eine absteigende Folge $\overline{U_n}$ von abg. Mengen, deren Durchschnitt nicht leer ist, da X kompakt. Und $\emptyset \neq \cap_n \overline{U_n} \subseteq \cap_n S_n \cap U$, also S dicht in X. $\square$

Satz 12.7 (JP, Theorem 2.3)
(OS_n, δ_{cb}) ist nicht separabel für $n > 2$.

Beweis 61
Sei $f : (OS_n, \delta_w) \to (OS_n, \delta_{cb})$ die identische Abbildung. Nimm an, dass (OS_n, δ_{cb}) separabel ist.
Sei β eine abgeschlossene Kugel in (OS_n, δ_{cb}). Dann ist β abgeschlossen bezüglich der schwachen Metrik δ_w:
Sei F_i eine δ_w-konvergente Folge in $\beta := \{F \in OS_n \,|\, \delta_{cb}(E, F) \leq r\}$ mit Grenzwert F. Dann ist mit 9.3 und 9.4.(i).(ii) $\delta_{cb}(E, F) = \sup_k \delta_k(E, F) \leq \sup_k \delta_k(E, F_{i_k}) + \sup_k \delta_k(F_{i_k}, F) \leq r + \varepsilon$. Da man ε beliebig klein machen kann, ist $F \in \beta$.
Für alle offenen Mengen U in der δ_{cb}-Metrik ist $f^{-1}(U)$ eine F_σ-Menge:
Nach Annahme ist (OS_n, δ_{cb}) separabel, also es gibt eine abzählbare, dichte Teilmenge $D \subseteq U$. Es ist nicht schwer einzusehen - da U offen -, dass es für jedes $x \in U$ eine größte, offene Kugel B mit Mittelpunkt x gibt, sodass B ganz in U liegt. Sei $R(x)$ der Radius dieser offenen Kugel B, wobei ∞ zugelassen ist. Für jedes $d \in D$ sei nun B_d die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt d und Radius $R(d)/2$. Dann ist $\cup_{d \in D} B_d = U$: "$\subseteq$" ist klar und für ein $x \in U$ wähle ein $d \in D$ mit Abstand kleiner $R(x)/4$, dann liegt auch die offene Kugel mit Mittelpunkt d und Radius $3R(x)/4$ in U und damit die abg. Kugel mit Mittelpunkt d und Radius $3R(x)/8$ in B_d und damit liegt $x \in B_d$, also "$\supseteq$". Da also U abz. Vereinigung von abg. Kugeln ist, ist mit der vorhergehenden Behauptung $f^{-1}(U)$ eine F_σ-Menge.

Damit ist also f eine Funktion der ersten Bairschen Klasse. Da nach Annahme der Wertebereich von f separabel ist und wegen 9.6 der Definitionsbereisch kompakt ist, lassen sich 12.5 und 12.6 anwenden. D.h. die Menge der Stetigkeitsstellen von f muss dicht liegen in (OS_n, δ_w).
Für jedes Element $E \in OS_n$ gibt es daher eine Folge E_i mit $\delta_w - \lim_i E_i = E$, wobei f stetig ist in E_i. Mit 9.7 ist $d_{SK}(E_i) = d_{SK}(E_i^*) = 1$. Und mit 9.4 ist $E = \oplus_i E_i/\mathcal{U}$ bezüglich eines nichttrivialen Ultrafilters $\mathcal{U}$.
Seien nun $\pi_i : E_i \to E_i^{**}$ die kanonischen Einbettungen und wendet man 12.4 auf die π_i an (siehe auch 4.9), so erhält man eine vollständig isometrisch, isomorphe Abbildung $v : \oplus_i E_i/\mathcal{U} \to (\oplus_i E_i^*/\mathcal{U})^* = (\oplus_i E_i/\mathcal{U})^{**}$ (letzte Gleichung wegen 7.8), die die Ungleichung (94) mit $C = D = 1$ erfüllt. Fasst man hier v auf als Abbildung $v : E \to E^{**}$, so bleibt Ungleichung (94) gültig. Sei $\pi : E \to E^{**}$ die kanonische Einbettung und zerlege v in der Form $v = \pi \circ v_2$ mit $v_2 : E \to E$. (Tatsächlich kann man nachrechnen, dass $v = \pi$ und also $v_2 = id_E$.)
Für alle biorthogonalen Systeme $(e_1, ..., e_n)$, $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in E folgt nun mit (94):

$$n = |\sum_{k=1}^{n} \pi(e_k)(e_k^*)| = |\sum_k (\pi \circ v_2 \circ v_2^{-1})(e_k)(e_k^*)| = |\sum_k v(v_2^{-1}(e_k))(e_k^*)| \tag{97}$$

$$\leq \|\sum_k \lambda(t_k) \otimes v_2^{-1}(e_k)\|_{C_\lambda \otimes_{min} E} \, \|\sum_k \lambda(t_k) \otimes e_k^*\|_{C_\lambda \otimes_{min} E^*} \,. \tag{98}$$

Da mit v auch v_2 eine vollständige Isometrie ist, kann man sich v_2^{-1} in (98) wegdenken.
Setzt man nun speziell $t_1 := g_1, ..., t_n := g_n$, wobei g_i die Buchstaben von der freien Gruppe F_∞ seien, und $E := lin\{\lambda(g_1), ..., \lambda(g_n)\} \subseteq C_\lambda(F_\infty)$ und setzt man weiter $e_k := \lambda(g_k)$ und wählt man die $e_k^* \in E^*$ wieder biorthogonal zu $(e_1, ..., e_n)$, so erhält man aus (97), (98) und (85):

$$n \leq \|\sum_k \lambda(g_k) \otimes \lambda(g_k)\|_{C_\lambda \otimes_{min} C_\lambda} \, \|\sum_k e_k \otimes e_k^*\|_{E \otimes_{min} E^*}$$
$$= 2\sqrt{n-1}\; \|id_E\|_{cb(E,E)} = 2\sqrt{n-1}\,.$$

Für $n > 2$ ist das aber ein Widerspruch. □

Proposition 12.8 (JP, p347 Proposition 2.6)

Sei A eine separable C^*-Algebra und $n \geq 1$. Dann gelten
(i) Die Menge $S_n(A) \subseteq OS_n$ aller n-dimensionalen Teilräume von A ist separabel in (OS_n, δ_{cb}).
(ii) Für $n > 2$ liegt $S_n(A)$ nicht dicht in (OS_n, δ_{cb}).
(iii) Sei F eine freie Gruppe. So gilt (ii) für $A := C^*(F)$.

Beweis 62

(i) Sei D eine abzählbare, dichte Teilmenge von A. Für irgendein n-Tupel $x = (x_1, ..., x_n)$ von linear unabhängigen Elementen von A sei $E_x \subseteq A$ der aufgespannte Teilraum. Seien $x_1^*, ..., x_n^*$ die zu x_i biorthogonale Funktionale in A^*. Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle $y_1, ..., y_n$ aus D, sodass $\sum \|x_i - y_i\| \leq \varepsilon$. Sei $u : A \to A$ der zu $\sum x_i^* \otimes (y_i - x_i)$ assoziierte Operator. Mit 4.5 ist

$\|u\|_{cb} \leq \varepsilon$. Es ist $(id_A + u)(x_i) = y_i$ und aus der Theorie der Banachalgebren folgt, dass $id + u$ invertierbar ist für $\varepsilon < 1$. Zudem ist $\|(id+u)^{-1}\|_{cb} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \to 1$ und $\|id+u\|_{cb} \leq 1+\varepsilon \to 1$ für $\varepsilon \to 0$. Damit geht $d_{cb}(E_x, E_y) \to 1$ für $\varepsilon \to 0$. D.h. E_x lässt sich beliebig genau durch die abzählbar vielen E_y, $y \in D^n$, approximieren.

(ii) Folgt aus (i), da sonst (OS_n, δ_{cb}) separabel wäre im Widerspruch zu Satz 12.7.

(iii) Wenn I eine abzählbare Indexmenge ist, so ist F_I abzählbar und $l^1(F_I)$ separabel. Damit ist aber auch $C^*(F_I)$ separabel und es gilt (iii). Wenn I nicht abzählbar ist und E ein n-dimensionaler Operatorraum $E \subseteq C^*(F_I)$ ist, so ist etwa ein Basisvektor $e_1 \in E$ ein $C^*(F_I)$-Limes einer Folge von $l^1(F_I)$-Funktionen. Jedes Element aus $l^1(F_I)$ hat aber abzählbaren Träger und damit auch die ganze Folge. Es gibt also eine abzählbare Indexmenge $J_1 \subseteq I$, sodass die Folge in $l^1(F_{J_1}) \subseteq l^1(F_I)$ liegt. Da nach oben gesagtem aber (siehe (96) folgende) $C^*(F_{J_1}) \subseteq C^*(F_I)$ gilt, ist $e_1 \in C^*(F_{J_1})$. Wegen der n-dimensionalität von E ist letztendlich $E \subseteq C^*(F_J) = C^*(F_\infty)$ mit J abzählbar. D.h. $C^*(F_I)$ enthält nicht mehr n-dim. Operatorräume wie die separable C^*-Algebra $A := C^*(F_\infty)$. Mit (ii) ist damit das Resultat erhalten. □

Satz 12.9 (JP, p352 Corollary 3.1)

Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum h gilt:

$$B(h) \otimes_{min} B(h) \neq B(h) \otimes_{max} B(h)$$

Beweis 63

Sei $n > 2$ fest. $B(h)$ enthält alle Elemente aus OS_n wegen 1.2.

Wenn U die unitärer Gruppe von $B(h)$ ist, so ist π_1 mit $\pi_1(u) := u$, $u \in U$, eine unitäre Darstellung von F_U in $B(h)$ und man erhält einen surjektive Darstellung $\pi : C^*(F_U) \to B(h)$.

Setze $A := C^*(F_U)$ und $I := ker(\pi)$, insbesonder ist $B(h) = A/I$.

Wegen 12.8.(iii) gibt es ein $E_0 \in OS_n$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass

$$d_{cb}(E, E_0) \geq 1 + \varepsilon_0 \qquad \forall\ n\text{-dimensionalen Teilräume } E \subseteq A\,. \tag{99}$$

Mit 10.2.(ii) gilt algebraisch

$$B(h)\otimes B(h) \;=\; (A/I)\otimes B(h) \;=\; [A\otimes B(h)]/[I\otimes B(h)] \;\subseteq\; [A\otimes_{min} B(h)]/[I\otimes_{min} B(h)]\,. \tag{100}$$

Wenn man nun annimmt, dass nur eine C^*-Norm auf $B(h) \otimes B(h)$ existiert, dann muss, da die Einbettung (100) ein *-homomorphismus ist,

$$B(h) \otimes_{min} B(h) \;=\; [A \otimes_{min} B(h)]/[I \otimes_{min} B(h)]\,. \tag{101}$$

Sei $j : E_0 \to B(h)$ eine vollständig isometrische Einbettung. Es ist $E_0^* \subseteq B(h)$. $j \in cb(E_0, B(h)) = B(h) \otimes_{min} E_0^* \subseteq B(h) \otimes_{min} B(h)$. Aus der Isometrie (101) und 10.7 folgt, dass

$$T^{-1} : B(h) \otimes_{min} E_0^* \to (A \otimes_{min} E_0^*)/(I \otimes_{min} E_0^*)$$

eine Kontraktion ist. Sei $T^{-1}(j) = \tilde{j} + I \otimes_{min} E_0^*$, wobei $\tilde{j} \in A \otimes_{min} E_0^* = cb(E_0, A)$. Wähle $\tilde{j}$ so, sodass $\|\tilde{j}\| \leq \|j\| + \varepsilon = 1 + \varepsilon$. Wir zeigen, dass in $cb(E_0, B(h))$ gilt

$$\pi \tilde{j} = j \, . \tag{102}$$

Sei (Einsteinsche Summenkonvention!) $j = \pi(x_i) \otimes e_i^* \in B(h) \otimes E_0^*$, wo $x_i \in A$. Sei $\tilde{j} = (x_i + y_i) \otimes e_i^* \in A \otimes E_0^*$ mit $y_i \in I$. Sei $e \in E_0$. Dann ist $\pi j(e) = \pi((x_i + y_i) e_i^*(e)) = \pi(x_i)\, e_i^*(e) = j(e)$, also die Behauptung (102).
Beachte nun, dass j eine vollst. Isometrie ist, also $\|j^{-1}\|_{cb} = 1$. Mit (102) ist $\tilde{j}$ injektiv und $j^{-1}\pi\tilde{j} = id_{E_0^*}$ und damit

$$d_{cb}(\tilde{j}(E_0), E_0) \leq \|\tilde{j}\|_{cb} \|\tilde{j}^{-1}\|_{cb} = \|\tilde{j}\|_{cb} \|j^{-1}\pi\|_{cb} \leq 1 + \varepsilon \, .$$

Da $\tilde{j}(E_0) \subseteq A$, ist das aber für $\varepsilon_0 < \varepsilon$ ein Widerspruch zu (99). $\square$

Literatur

[AO] C. Akemann, P. Ostrand, Computing norms in group C^*-algebras, American Journal of Mathematics, Vol. 98 (1976), No. 4, 1015-1047

[dCH] J. de Cannière, U. Haagerup, Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups, Amer. J. Math. 107 (1985), 455-500

[ER] E. Effros, Z.J. Ruan, A new approach to operator spaces, Canad. Math. Bull., Vol. 34 (3), 1991, 329-337

[JP] M. Junge, G. Pisier, Bilinear forms on exakt operator spaces and $B(H) \otimes B(H)$, Geometric And Functional Analysis Vol 5, No.2 (1995), 329-363

[K] K. Kuratowski, Topology, Volume I, 1966, Academic Press, New York and London

[Kr] J. Kraus, The slice map problem and approximation properties, J. Funct. Anal. 102 (1991), 116-155

[L] G. Leobacher, Tensorprodukte von C^*-Algebren und vollständig positive Operatoren, Diplomarbeit an der Universität Salzburg, Institut für Mathematik, 1999

[P1] G. Pisier, An introduction to the theory of operator spaces, Preliminary Version (November 29 1995)

[P2] G. Pisier, Similarity problems and completely bounded maps, Lecture Notes in Mathematics 1618, Springer Verlag, 1996

[R] Z.J. Ruan, Subspaces of C^*-algebras, J. Funct. Anal. 76 (1988), 217-230

[W1] S. Wassermann, On tensor products of certain group C^*-algebras, J. Funct. Anal. 23 (1976), 239-254

[W2] S. Wassermann, Exact C^*-algebras and related topics, Lecture Notes Series 19, Seoul National University, 1994

[Wo] P.Wojtaszczyk, Banach Spaces for Analysts, Department of Mathematics, Texas A&M Univ., (1990 ?), preliminary version

Notationen

$\mathcal{N}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$	Natürlichen, reellen, komplexen Zahlen
M_n	Raum der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{C}$
$M_n(E)$	Raum der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus E
l^2	$l^2(N)$
$B(h)$	Raum der normbeschränkten, linearen Abbildungen auf h
$B(h,k)$	Raum der normbeschränkten, linearen Abbildungen $h \to k$
K	Raum der kompakten Abbildungen $\in B(l^2)$
$cb(E,F)$	Raum der vollständig beschränkten, linearen Abbildungen $E \to F$
c.b.	completely bounded (= vollständig beschränkt)
t.b.	tracially bounded (= spurbeschränkt)
id	die identische Abbildung
id_E	die identische Abbildung $E \to E$
E^*	der Dualraum von E
$E \otimes F$	algebraisches Tensorprodukt
$E \otimes_{min} F$	minimales Tensorprodukt von C^*-Algebren oder Operatorräumen
$A \otimes_{max} B$	maximales Tensorprodukt von C^*-Algebren
$E \otimes_M F$	"maximales Tensorprodukt" von Operatorräumen
$\oplus_i E_i$	direkte Summe der C^*-Algebren oder Operatorräume E_i
$\oplus_i E_i/\mathcal{U}$	Ultraprodukt der C^*-Algebren oder Operatorräume E_i bezüglich $\mathcal{U}$
$C^*(G)$	die volle C^*-Algebra der diskreten Gruppe G
$C^*_\lambda(G)$	die reduzierte C^*-Algebra der diskreten Gruppe G
$\tilde{A}$	die C^*-Algebra, enstanden aus A adjungiert um 1
F_∞	die freie Gruppe mit $card(\mathcal{N})$ Erzeugenden
$d_{cb}(E,F)$	siehe Kapitel 'Endlichdimensionale Operatorräume'
$d_k(E,F)$	siehe Kapitel 'Endlichdimensionale Operatorräume'
$\delta_{cb}(E,F)$	siehe Kapitel 'Endlichdimensionale Operatorräume'
$ex(E)$	Exaktheitskonstante des Operatorraums E
$d_{SK}(E)$	siehe Kapiteln 'Endlichdimensionale Operatorräume' und 'Exaktheit'
$E = F$	wenn E, F Operatorräume:

	$\exists$ bijektive, vollständig isometrische Abb. $u : E \to F$
$E \subseteq F$	wenn E, F Operatorräume: $\exists$ vollständig isometrische Abb. $u : E \to F$
$E \approx F$	wenn E, F Operatorräume: $\exists$ vollständig isomorphe Abb. $u : E \to F$

LEBENSLAUF:

Bernhard J. Burgstaller wurde am 15. Mai 1973 in Hallein geboren.
Er besuchte 1 Jahr den Kindergarten in Köstendorf, 4 Jahre die Volksschule in Köstendorf, 4 Jahre die Hauptschule in Neumarkt a.W., 6,5 Jahre das BORG in Neumarkt a.W. mit Matura am 21. März 1994. Ab April 1994 Studium der Mathematik an der Universität Salzburg.